MODULO 3 – LEZIONE 2

Relazioni notevoli tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo

Le funzioni seno, coseno e tangente non sono indipendenti tra loro e si possono dunque definire formule che permettano di passare da ciascuna di esse alle altre.

Le seguenti formule, che abbiamo già visto, consentono di ricavare il seno di un angolo noto il coseno o viceversa con le seguenti formule,

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

I segno si dovrà scegliere considerando il quadrante in cui vi è il secondo lato dell'angolo:

- nel primo quadrante (angoli tra 0 e 90°) le due funzioni sono entrambe positive;
- nel secondo quadrante (angoli tra 90° e 180°) il coseno è negativo ed il seno positivo;
- nel terzo quadrante (angoli tra 180° e 270°) le due funzioni sono entrambe negative;
- nel quarto quadrante (angoli tra 270° e 360°) il coseno è positivo, il seno negativo

è possibile poi calcolare la tangente rispetto al solo seno e rispetto al solo coseno

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Da questa sostituendo le due precedenti relazioni si possono ricavare:

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

Il segno deve essere scelto sempre in funzione del quadrante in cui si trova il secondo lato dell'angolo come segue:

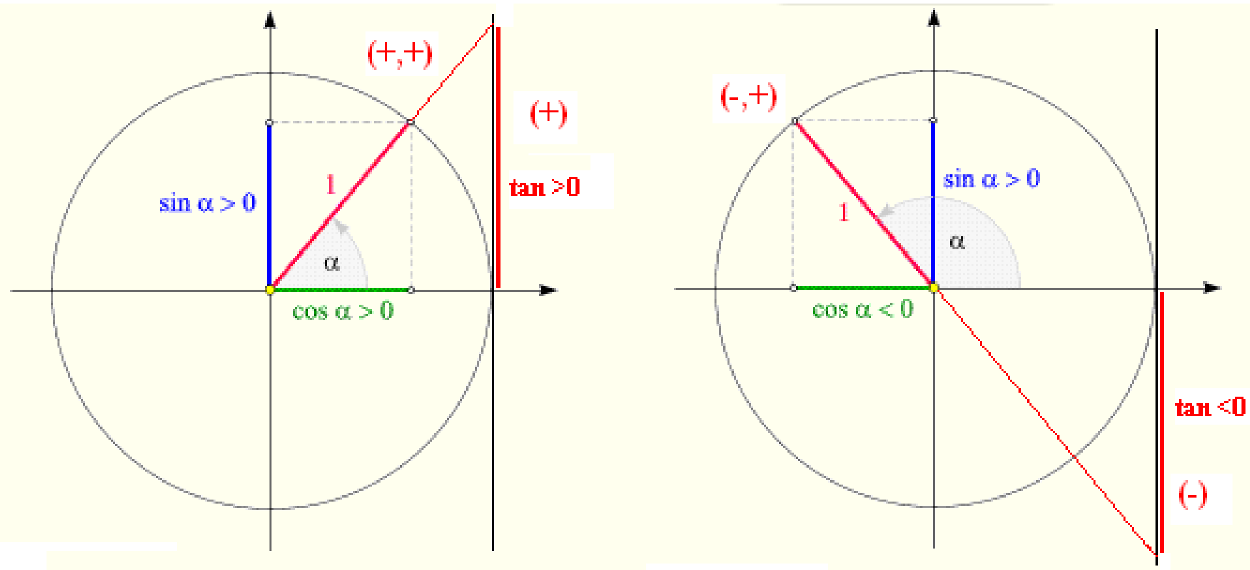
- nel primo quadrante (angoli tra 0 e 90°) la tangente è positiva;
- nel secondo quadrante (angoli tra 90° e 180°) la tangente è negativa;
- nel terzo quadrante (angoli tra 180° e 270°) la tangente è positiva;
- nel quarto quadrante (angoli tra 270° e 360°) la tangente è negativa

Infine nota la tangente si possono ricavare seno e coseno con le seguenti formule

$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

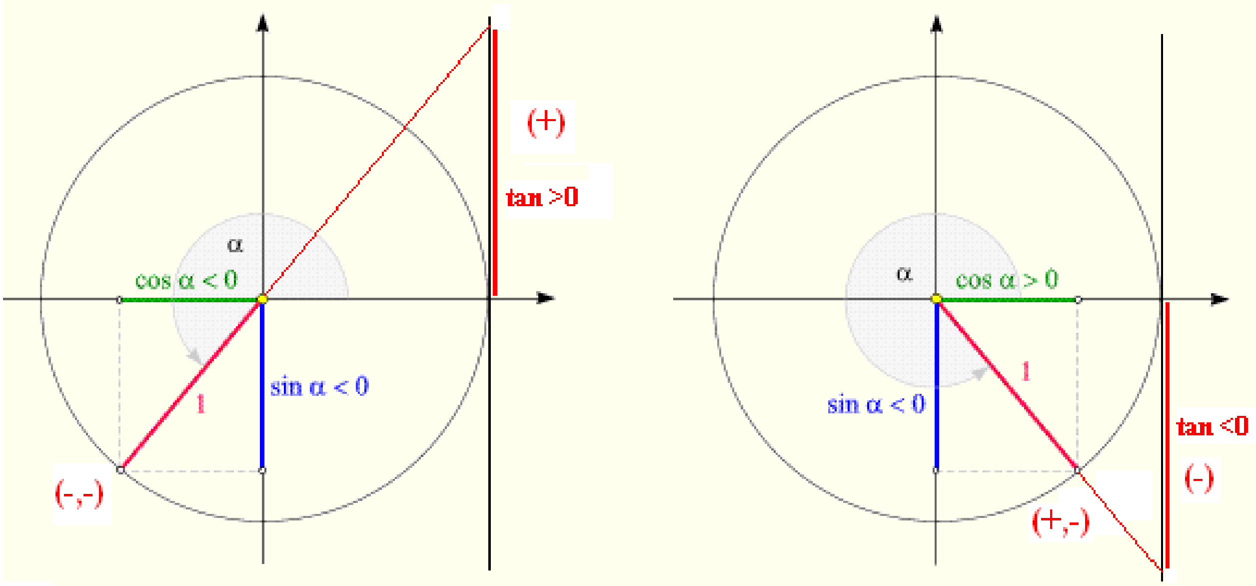
$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

:



Se α è fra 0° e 90°
(il raggio è nel primo quadrante),
sin α e **cos α** sono entrambi **positivi**.

Se α è fra 90° e 180°
(il raggio è nel secondo quadrante),
sin α è **positivo** e **cos α** è **negativo**.



Se α è fra 180° e 270°
(il raggio è nel terzo quadrante),
sin α e **cos α** sono entrambi **negativi**.

Se α è fra 270° e 360°
(il raggio è nel quarto quadrante),
sin α è **negativo** e **cos α** è **positivo**.

Archi associati

Definizioni preliminari

Ci dedichiamo ora alle relazioni tra funzioni goniometriche per angoli che verificano determinate proprietà. In particolare vediamo come le funzioni trigonometriche variano quando gli angoli variano di quantità particolari come 90° ($\pi/2$), 180° (π) o 360° (2π)
Ricordiamo nuovamente alcune definizioni preliminari.

Angoli complementari:

Due angoli si dicono complementari se la loro somma è $\pi/2$ (90°).

Cioè se	$\alpha+\beta=\pi/2$	**ovvero**	$\alpha+\beta=90°$
Da cui:	$\alpha=\pi/2-\beta$	**ovvero**	$\alpha=90°-\beta$
	$\beta=\pi/2-\alpha$	**ovvero**	$\beta=90°-\alpha$

Angoli supplementari:

Due angoli si dicono supplementari de la loro somma è π (180°).

Cioè se	$\alpha+\beta=\pi$	**ovvero**	$\alpha+\beta=180°$
Da cui:	$\alpha=\pi-\beta$	**ovvero**	$\alpha=180°-\beta$
	$\beta=\pi-\alpha$	**ovvero**	$\beta=180°-\alpha$

Angoli esplementari:

Due angoli si dicono esplementari se hanno per somma un angolo giro

Cioè se	$\alpha+\beta=2\pi$	**ovvero**	$\alpha+\beta=360°$
Da cui	$\alpha=2\pi-\beta$	**ovvero**	$\alpha=360°-\beta$
	$\beta=2\pi-\alpha$	**ovvero**	$\beta=360°-\alpha$

Angoli opposti:

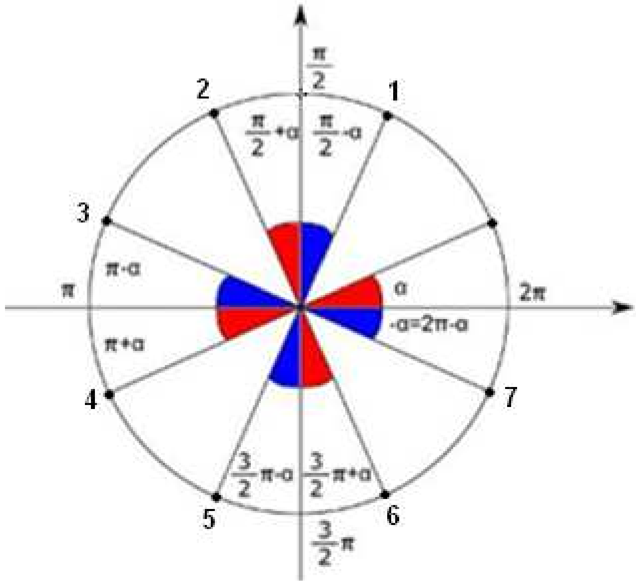
Due angoli si dicono opposti se differiscono solo nel segno.

Cioè se	$\alpha=-\beta$	**ovvero**	$\beta=-\alpha$
Da cui	$\alpha+\beta=0$		

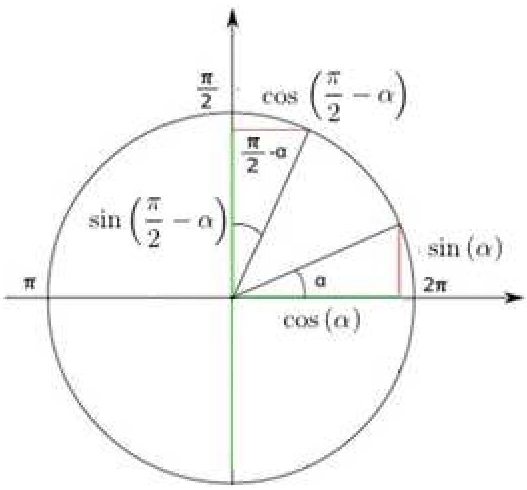
RELAZIONI PER GLI ARCHI ASSOCIATI AD UN ANGOLO α

Gli archi associati ad un angolo α sono quelli che si ottengono sommando o sottraendo l'angolo α ai principali angoli della circonferenza goniometrica

1	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	angolo complementare
2	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	
3	$\pi-\alpha$	angolo supplementare
4	$\pi+\alpha$	
5	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	
7	$2\pi-\alpha=-\alpha$	angolo esplementare o opposto

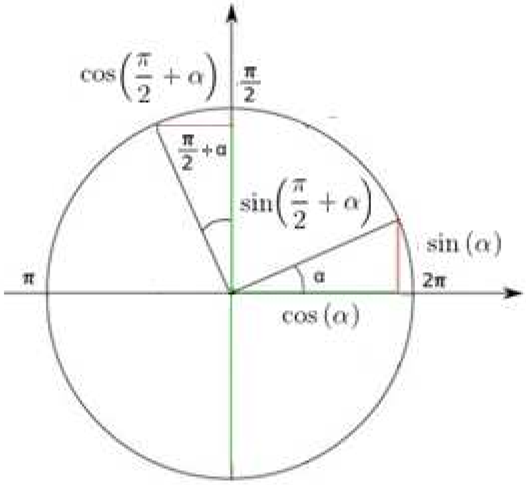


1) angoli complementari β=$\pi/2$-α



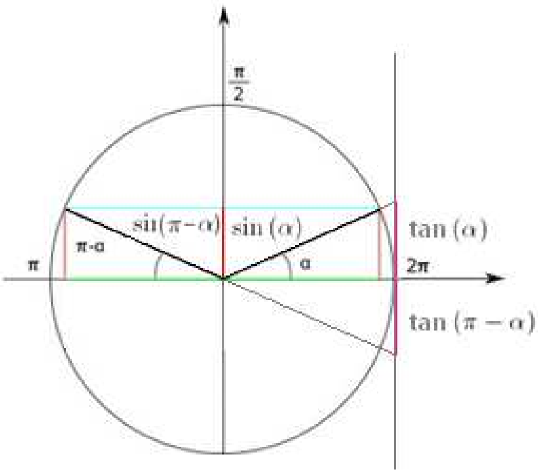
Sen α = Cos($\pi/$**2-**α)   Cos α = Sen($\pi/$**2-**α)   Tan α = Cotg($\pi/$**2-**α)

2) angoli $\beta=\pi/2+\alpha$



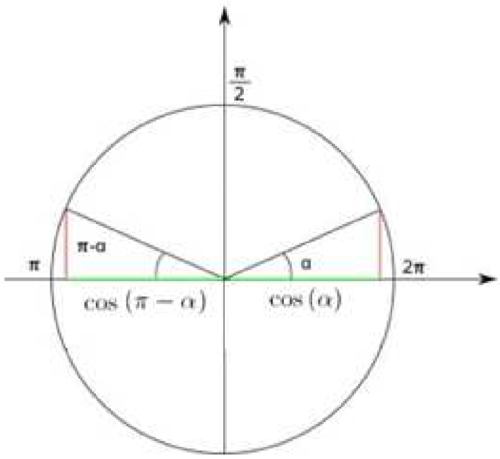
Sen α = -Cos($\pi/2+\alpha$) Cos α = Sen($\pi/2+\alpha$) Tan α = -Cotg($\pi/2+\alpha$)

3) angoli supplementari $\beta=\pi-\alpha$



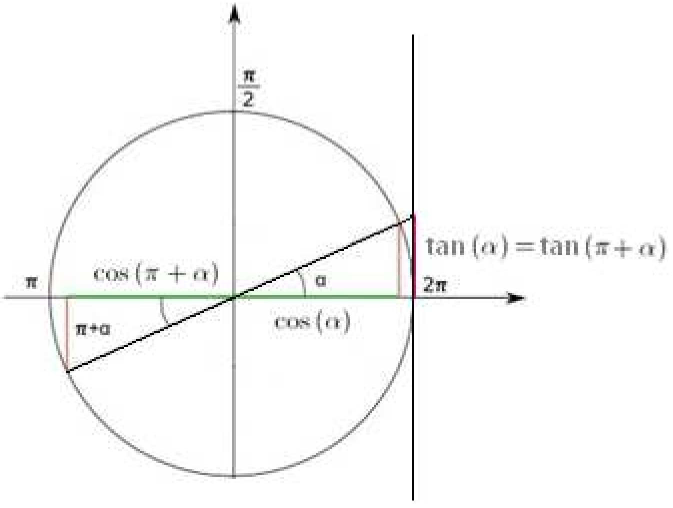
Sen α = Sen($\pi-\alpha$)

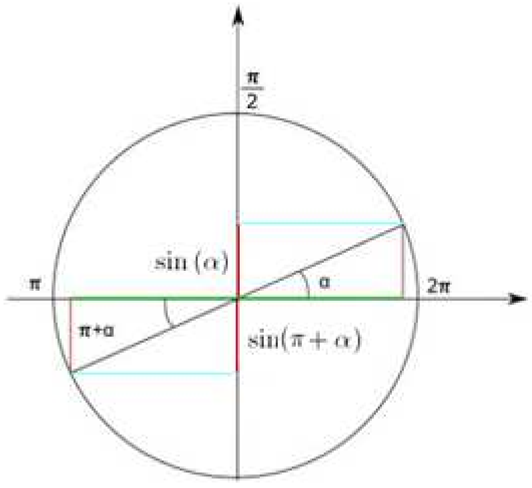
Tan α = -Tan($\pi-\alpha$)



Cos α = -Cos($\pi-\alpha$) =

4) Caso $\beta=\pi+\alpha$



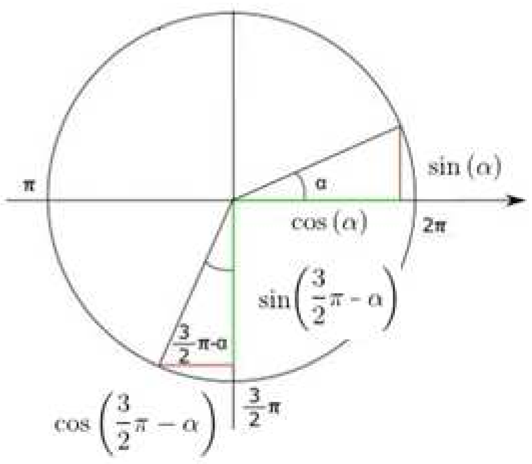


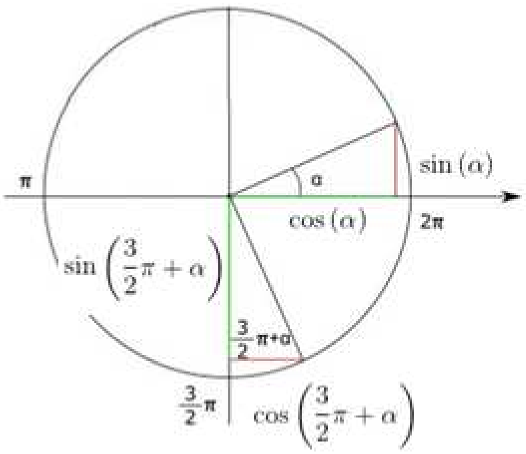
Cos α = - Cos($\pi+\alpha$)

Tan α = Tan($\pi+\alpha$)

Sen α = - Sen($\pi+\alpha$)

5 e 6) Casi $\beta=3\pi/2-\alpha$ e $\beta=3\pi/2+\alpha$





Sen α = -Cos(**3**π/**2**-α)

Cos α = -Sen(**3**π/**2**-α)

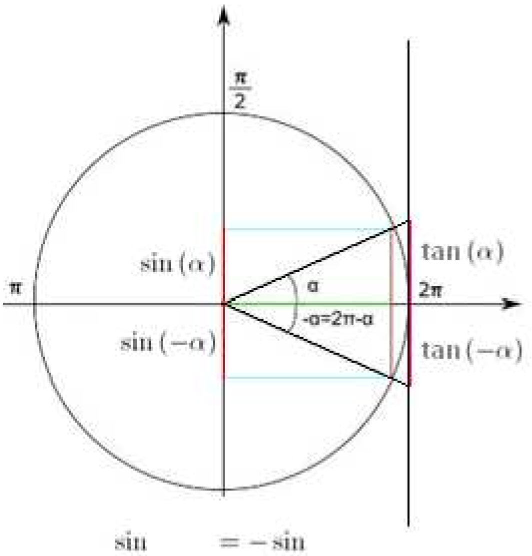
Tan α = Cotg(**3**π/**2**-α)

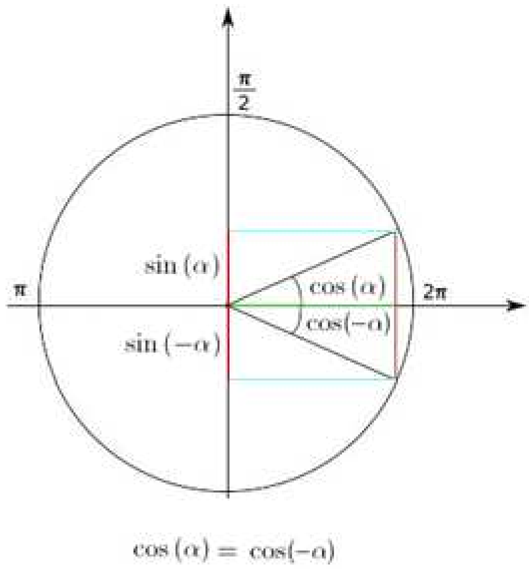
Sen α = Cos(**3**π/**2**+α)

Cos α = -Sen(**3**π/**2**+α)

Tan α = -Cotg(**3**π/**2**+α)

7) angoli esplementari $\beta=2\pi-\alpha$ o angoli opposti $\beta=-\alpha$





Sen α = - Sen(2π-α) = - Sen(-α)

Tan α = - Tan (2π-α) = - Tan(-α)

Cos α = Cos(2π-α) = Cos(-α)

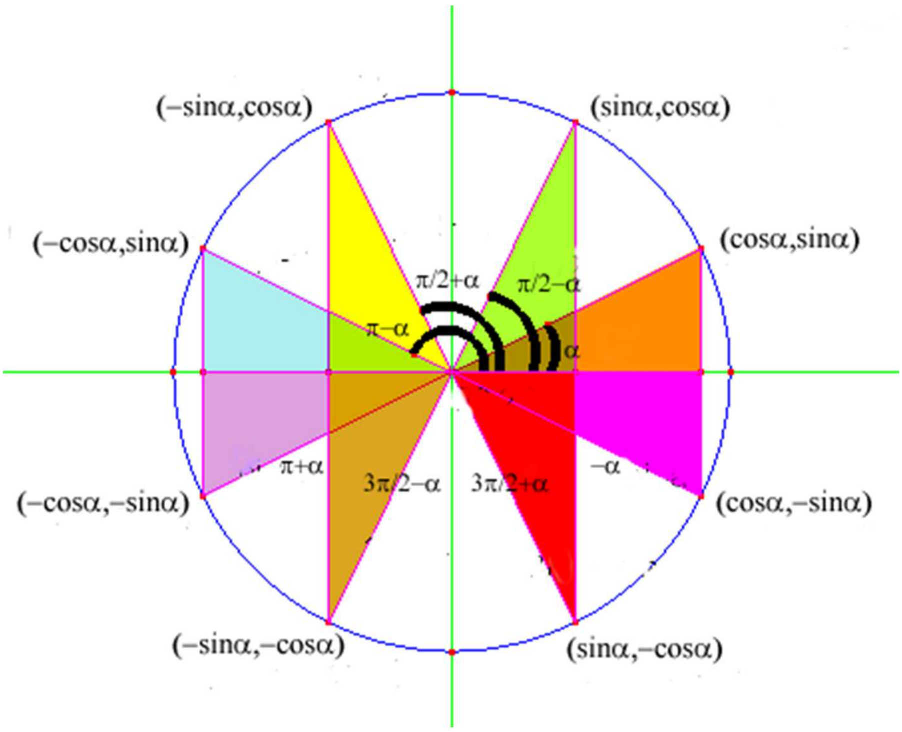
ESEMPIO DI CALCOLO PER LE TANGENTI

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -\cot(\alpha);$
$\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$

TABELLA RIASSUNTIVA

$\frac{\pi}{2}-\alpha:$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha);$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot(\alpha)$
$\frac{\pi}{2}+\alpha:$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha);$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot(\alpha);$
$\pi-\alpha:$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha);$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$
$\pi+\alpha:$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha);$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan(\alpha);$
$\frac{3}{2}\pi-\alpha:$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos(\alpha);$	$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin(\alpha)$	$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\cot(\alpha)$
$\frac{3}{2}\pi+\alpha:$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos(\alpha);$	$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin(\alpha)$	$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cot(\alpha);$
$-\alpha:$ $2\pi-\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha);$ $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin(\alpha);$	$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha);$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan(\alpha);$

SCHEMA DI SENO E COSENO DEGLI ARCHI ASSOCIATI
SULLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA



FORMULE GONIOMETRICHE: ADDIZIONE E SOTTRAZIONE, DUPLICAZIONE, BISEZIONE, PARAMETRICHE, PROSTAFERESI E WERNER

Si accenna infine a tutte le principali relazioni tra angoli e funzioni goniometriche.
Le formule goniometriche che seguono servono per ricavare le funzioni goniometriche di angoli che sono somma, differenza o prodotto di altri angoli oppure sono formule che legano i prodotti delle funzioni goniometriche.

Formule di addizione e sottrazione
Con le formule di addizione e sottrazione si possono calcolare o esprimere le funzioni goniometriche di somme o differenze di angoli in somme e prodotti di funzioni goniometriche degli angoli stessi.

Formule di duplicazione
Con le formule di duplicazione si possono calcolare o esprimere le funzioni goniometriche del doppio di un angolo usando le funzioni goniometriche dell'angolo stesso.

Formule parametriche
Le formule parametriche esprimono il seno, il coseno e la tangente di un angolo rispetto ad un parametro $t = \tan(\alpha/2)$ attraverso opportune **funzioni razionali** della variabile t stessa. Da notare che queste funzioni razionali (e quindi queste formule) valgono solo se la $\tan(\alpha/2)$ esista, cioè se $\alpha/2$ è diverso da $\pi/2 + K\pi$ e quindi se α è diverso da $\pi + 2K\pi$
Con K numero intero

Formule di bisezione
Con le formule di bisezione si possono calcolare o esprimere le funzioni goniometriche della metà di un angolo usando le funzioni goniometriche dell'angolo stesso.

Formule di prostaferesi
Con le **formule di prostaferesi** è possibile trasformare somme tra funzioni goniometriche in prodotti di funzioni goniometriche. Queste formule sono molto usate nell’elettrotecnica, nell’elettronica e nella modulazione dei segnali per la trasmissione dei dati

Formule di Werner
Con le formule di Werner si possono trasformare prodotti di funzioni goniometriche in somme di tali funzioni.

Segue una scheda riassuntiva con tutte le formule sopra citate.

Tipo di formula	Espressione goniometrica
Formule di addizione e sottrazione per il coseno	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta$
Formule di addizione e sottrazione per il seno	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
Formule di addizione e sottrazione per la tangente	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\,\tan\beta}$
Formule di duplicazione	$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
Formule parametriche ($t=\tan(\alpha/2)$)	$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$
Formule di bisezione	$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
Formule di prostaferesi per il seno	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
Formule di prostaferesi per il coseno	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
Formule di Werner	$\sin\alpha\,\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ $\cos\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ $\sin\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

ESERCIZI SVOLTI

PASSAGGIO DA GRADI A RADIANTI E VICEVERSA

1) Determinare la misura in gradi dell'angolo di 1 radiante
   Svolgimento: useremo inizialmente la formula

   $\alpha^{\circ} = 180° \alpha^{rad}/ \pi = 180°*1/ \pi = 57°,325$

   Otteniamo così la misura in gradi; ma con questo procedimento le frazioni di grado sono espresse in forma decimale. Per esprimere le frazioni di grado in minuti, secondi, decimi di secondo e centesimi di secondo si procede come segue:

   57°,325=57°+ (0,3248*60)'=57° 19',488=57° 19' +(0,488*60)''=57° 19' 29'',28

   Le ultime due cifre dopo i 29 secondi sono i decimi di secondo (2) e i centesimi di secondo (8).

2) Determinare la misura in radianti ell'angolo di 1°
   Svolgimento: useremo la formula

   $\alpha^{rad} = \pi * \alpha^{\circ}/ 180° = \pi*1°/180° = 0,0174$

3) Determinare le misure in radianti dei seguenti angoli:
   30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°

   Svolgimento: useremo la formula $\pi * \alpha^{\circ}/ 180°$

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{30°}/180° = \pi/6$ (semplificando 30° e 180° ottengo 1/6)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{45°}/180° = \pi/4$ (semplificando 45° e 180° ottengo 1/4)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{60°}/180° = \pi/3$ (semplificando 60° e 180° ottengo 1/3)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{90°}/180° = \pi/2$ (semplificando 90° e 180° ottengo 1/2)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{120°}/180° = 2\pi/3$ (semplificando 120° e 180° ottengo 2/3)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{135°}/180° = 3\pi/4$ (semplificando 135° e 180° ottengo 3/4)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{150°}/180° = 5\pi/6$ (semplificando 150° e 180° ottengo 5/6)

   $\alpha^{rad} = \pi*\alpha^{\circ}/180° = \pi*\mathbf{180°}/180° = \pi$ (semplificando 180° e 180° ottengo 1)

CALCOLO DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI UN ANGOLO NOTA UNA DI ESSE

Esercizio 1: Noto che il seno di un angolo è 1/3 calcolare il coseno e la tangente.
Svolgimento: Si useranno le seguenti due formule

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \pm\frac{1}{3}\,\frac{3}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 2: Noto che il seno di un angolo è 1/3 e che l'angolo è tra 90° e 180° calcolare il coseno e la tangente.
Svolgimento: riapplichiamo le stesse formule dell'esercizio precedente, stavolta però sapendo che l'angolo è del secondo quadrante sappiamo che il Coseno sarà negativo ed anche la tangente, quindi potremo indicare il segno dei risultati:

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 3: Calcolare Seno e Tangente di un angolo il cui coseno vale 1/5

Svolgimento: Si useranno le seguenti due formule

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot 5 = \pm 2\sqrt{6}$$

Esercizio 4: Calcolare seno e coseno di un angolo sapendo che sua tangente è -1/5 e che l'angolo è compreso tra 270° e 360°

Svolgimento: per la risoluzione useremo le due seguenti formule in cui sostituiremo alla tangente il valore -1/5; i segni verranno scelti: positivo il coseno e negativo il seno poiché l'angolo è nel quarto quadrante.

$$\sin\alpha = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}} \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

ESERCIZI VARI DI GONIOMETRIA

1) espressione goniometrica

$$\sin(120^o) + \frac{\cot(210^o)}{2} - \cos(540^o) - 3\tan(240^o)$$

osserviamo che:

$$\sin(120^o) = \sin(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cot(210^o) = \frac{1}{2}\frac{\cos(210^o)}{\sin(210^o)} = \frac{1}{2}\frac{-\cos(30^o)}{-\sin(30^o)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos(540^o) = \cos(180^o) = -1$$

$$3\tan(240^o) = 3\frac{\sin(240^o)}{\cos(240^o)} = 3\frac{-\sin(60^o)}{-\cos(60^o)} = 3\sqrt{3}$$

Sostituendo i valori così determinati nell'espressione ed eseguendo i calcoli si ottiene

$$1 - 2\sqrt{3}$$

2) espressione goniometrica

$$\sin(510^o) - 3\cos(120^o) + \tan(240^o) - 2\tan(120^o) = \bullet$$

Essendo 510° unangolo maggiore di 360 dobbiamo determinare l'angolo principale cioè quello minore di 360° che ha gli stessi valori delle funzioni goniometriche. Osservando che

$$510^o = 360^o + 150^o \simeq 150^o$$

Lavoreremo con l'angolo di 150° che ha Sen=1/2, Cos=-√3/2 e Tan=-√3/3

Mentre l'angoli di 120° ha Cos=-1/2 e Tan=-√3

E L'angolo di 240° ha Tan=√3

Sostituendo questi valori nell'espressione L'espressione è equivalente a

$$\bullet = \frac{1}{2} - 3\cdot(-\frac{1}{2}) + \sqrt{3} - 2(-\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$$

$$= 2 + 3\sqrt{3}$$

3) espressione goniometrica

$$\cos(0) + 2\cos(0) - \frac{1}{2}\sin 270^o + 3\sin 180^o = 1 + 2 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{7}{2}$$

4) espressione goniometrica
Si risolve con le proprietà degli archi associati e conoscendo i valori per delle funzioni goniometriche per gli angoli di 45°, 30° e 60°.

$$[\cos(45^o) - \frac{\tan(210^o)}{\tan(240^o)} - \cos(-45^o)] + \frac{1}{5}$$

$$\tan(210^o) = \tan(180^o + 30^o) = \tan(30^o) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan(240^o) = \tan(180^o + 60^o) = \tan(60^o) = \sqrt{3}$$

Quindi l'espressione diventa:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{15}$$

5) Espressione goniometrica
Si risolve trasformando tutti gli angoli maggiori di un angolo giro nei corrispondenti angoli principali e poi utilizzando i valori noti di sen, cos per gli angoli principali.

$$\frac{\sin(\frac{7}{2}\pi) - \cos(7\pi) + 2\sin(-\frac{11}{2}\pi)}{2\sin(-\frac{3}{2}\pi) + \cos(4\pi) - 4\cos(-\frac{5}{2}\pi} =$$

Ricordiamo il metodo:
se si ha seno o coseno con argomento nπ, se n è pari sarà come se avesse argomento 0, se è dispari come se avesse per argomento π.
Nell'esercizio al denominatore abbiamo $\cos(4\pi)$ in cui π è moltiplicato per un numero pari, quindi $\cos(4\pi) = \cos(0) = 1$
Ed abbiamo anche un caso dispari: $\cos(7\pi) = \cos(\pi) = -1$
Infine abbiamo anche due casi con la frazione: la frazione maggiore di 2π si dovrà provare a scrivere come somma tra due frazioni una con il numeratore multiplo del denominatore ed una con il numeratore non multiplo del denominatore, ad esempio:

$$\sin(\frac{7}{2}\pi) = \sin(\frac{6}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(3\pi + \frac{\pi}{2})$$

Per la regola precedente 3π può essere riscritto come π, quindi otteniamo

$$\sin(\frac{7}{2}\pi) = \sin(\pi + \frac{pi}{2}) = \sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$$

Per completare i casi possibili, nell' esercizio troviamo

$$\cos(\frac{5}{2}\pi) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

L'ultima ulteriore difficoltà dell'esercizio è data da

$$\sin(-\frac{11}{2}\pi)$$

Quando argomento delle funzioni goniometriche è negativo basta applicare le relazioni degli angoli opposti, in questo caso

$$\sin(-\frac{11}{2}\pi) = -\sin(\frac{11}{2}\pi)$$
$$\cos(-7\pi) = -\cos(7\pi)$$

Sostituendo nell'espressione si avrà:

$$\frac{\sin(\frac{7}{2}\pi) - \cos(7\pi) + 2\sin(-\frac{11}{2}\pi)}{2\sin(-\frac{3}{2}\pi) + \cos(4\pi) - 4\cos(-\frac{5}{2}\pi} =$$

$$= \frac{\sin(\frac{3}{2}\pi) - \cos(\pi) - 2\sin(\frac{3}{2}\pi)}{-2\sin(\frac{3}{2}\pi) + \cos(0) - 4\cos(-\frac{1}{2}\pi} =$$

$$= \frac{-1 + 1 - 2(-1)}{-2(-1) + 1 - 4 \cdot 0} = \frac{2}{3}$$

6) Espressione goniometrica:

$$\cos(4\pi) + 2\sin\left(-\frac{15}{2}\pi\right) + \frac{1}{3}\cos(-3pi) + \sin\frac{9}{2}\pi$$

Risoluzione: basta ricondurre gli angoli maggiori di 2π ai corrispondenti angoli principali e poi sostituire i valori delle funzioni goniometriche di questi ultimi eventualmente applicando le formule degli angoli associati

$$\cos(4\pi) = \cos(0) = 1$$
$$2\sin\left(-\frac{15}{2}\pi\right) = 2\sin\left(7\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$\frac{1}{3}\cos(-3\pi) = -\frac{1}{3}\cos(\pi) = -\frac{1}{3}$$
$$\sin\left(\frac{9}{2}\pi\right) = \sin\left(4\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Sostituendo nell'espressione iniziale risulta

$$1 + 2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

7) **Espressione goniometrica**

$$\frac{1}{2}cos\left(180^o\right)+\frac{2}{3}sen\left(0^o\right)-\frac{1}{4}sen\left(90^o\right)+6sen(-270^o)$$

In questa espressione basta solamente conoscere e sostituire i valori di sen e cos degli angoli notevoli presenti nell'espressione sostituendo a -270° l'angolo di 90° che è l'angolo principale corrispondente.

$$cos(180^o)=-1$$

$$sen(0^o)=0$$

$$sen(90^o)=1$$

$$sen(-270^o)=sen(90^o)=1$$

Perciò ora sostituiamo questi valori:

$$\frac{1}{2}(-1)-\frac{1}{4}+6=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+6=\frac{21}{4}$$

8) **Esercizio sull'uso degli archi associati per semplificare una espressione goniometrica**

$$\left[\frac{\sin\left(\pi-x\right)+\cos\left(-x\right)}{1-\tan\left(\pi-x\right)}\right]-\left[\frac{\sin\left(2\pi+x\right)-\cos\left(2\pi-x\right)}{\tan\left(\pi+x\right)-1}\right]$$

$$[\sin\left(\pi-x\right)=\sin\left(x\right)$$

$$[\cos\left(-x\right)=\cos\left(x\right)$$

$$\tan\left(\pi-x\right)=-\tan\left(x\right)$$

$$\sin\left(2\pi+x\right)=\sin\left(x\right)$$

$$\cos\left(2\pi-x\right)=\cos\left(x\right)$$

$$\tan\left(\pi+x\right)=\tan\left(x\right)$$

Sostituendo il tutto

$$\left[\frac{\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)}{1+\tan\left(x\right)}\right]-\left[\frac{\sin\left(x\right)-\cos\left(x\right)}{\tan\left(x\right)-1}\right]$$

ricordando poi che $\tan\left(x\right)=\frac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}$
l'espressione si riduce a

$$\cos\left(x\right)-\cos\left(x\right)=0$$

9) Semplificazione di una espressione goniometrica

$$\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} - \tan\alpha + \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Applico dalla relazione: $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ che sostituisco nel primo denominatore risulta

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \tan\alpha + \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Ancora dalla relazione fondamentale abbiamo che: $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$; sostituendo:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \tan\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Semplifichiamo la terza frazione ed esprimiamo il primo coseno al quadrato in funzione del seno:

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \tan\alpha + 1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Spezziamo la prima frazione in due come segue

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \tan\alpha + 1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Semplifichiamo la seconda frazione e semplifichiamo il risultato (-1) con il +1 opposto; semplifichiamo anche il primo e l'ultimo termine che sono opposti

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 - \tan\alpha + 1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Risulta

$$-\tan\alpha$$