MODULO 3 – LEZIONE 3

EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Si chiama **identità goniometrica** un'uguaglianza tra due espressioni goniometriche di uno o più angoli che è valida per qualunque valore si assegni agli angoli ad eccezione di quei valori angolari che fanno perdere significato ad una delle due espressioni.

Per verificare una identità goniometrica si possono utilizzare tutte le formule goniometriche studiate per trasformare le due espressioni in modo che alla fine del processo di trasformazione esse risultino uguali. Si deve lavorare quindi su ciascuna singola espressione senza applicare i principi di equivalenza che si applicano per le equazioni.

Si chiama invece equazione goniometrica una equazione che contiene funzioni goniometriche di uno o più angoli incogniti.

Le equazioni goniometriche in cui l'angolo o gli angoli incogniti compaiono anche al di fuori di una funzione goniometrica (es. SenX=X+1) normalmente non possono essere risolte con metodi elementari e di solito possono solo essere risolte in modo approssimato ricorrendo a metodi grafici.

Per gli scopi di queste lezioni limiteremo lo studio alle equazioni goniometriche in cui gli angoli incogniti siano presenti solo come argomenti di una o più funzioni goniometriche.

Vi sono 3 tipi di equazioni goniometriche elementari a cui poi si possono ricondurre molti altri tipi di equazioni goniometriche:

(1) SenX=b (2) CosX=a (3) TanX=c

Nei casi delle prime due equazioni, per le proprietà caratteristiche delle funzioni goniometriche seno e coseno, affinchè le due equazioni possano ammettere soluzioni è necessario che i valori di **a** e di **b** siano compresi tra -1 e 1 o uguali a -1 e 1. Valori per **a** o **b** minori di -1 o maggiori di 1 renderanno le due equazioni impossibili. Nel caso del terzo tipo di equazione invece **c** può avere qualsiasi valore reale, ma vi è una limitazione rispetto alla X che invece non può avere i valori 90°+K180° (o π/2+Kπ) con K numero intero (±1;±2;±3;……)

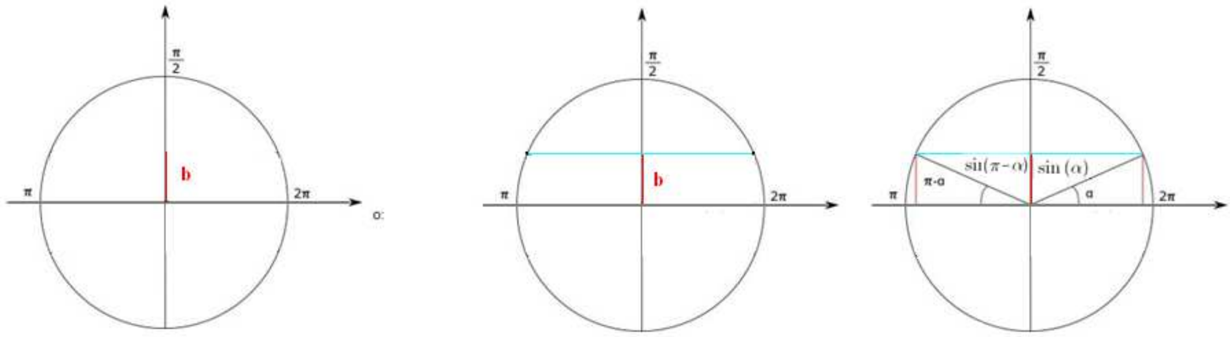
CASO 1: SenX=b

Per prima cosa bisogna verificare se il valore di **b** rispetta la condizione di essere un valore compreso tra -1 e 1: per cui il primo passo è verificare se -1≤**b**≤1

se **b** non rispetta questa prima condizione si può immediatamente concludere che l'equazione proposta non ha soluzione ed è impossibile.

Se invece **b** rispetta questa condizione allora esistono due, o uno, angoli orientati minori di un angolo giro che certamente hanno per seno il valore b.

Una semplice costruzione grafica ci permette di identificarli



Ricordando che il sen è l'ordinata dei punti della circonferenza goniometrica Il primo passo è tracciare sull'asse delle y un segmento di misura │b│ (questo simbolo si chiama valore assoluto di b e rappresenta il valore di b senza segno). Essendo l'asse y orientata verso l'alto se b è positivo tracceremo il segmento verso l'alto, se b è negativo verso il basso. (il segmento di misura b è stato tracciato in rosso)

Dall'estremo libero di b tracciamo poi una parallela all'asse X. Questa parallela interseca la circonferenza goniometrica in due punti corrispondenti agli angoli che hanno per seno il valore b. Detto α l'angolo più piccolo (nel primo quadrante in questo caso) il secondo angolo è (π-α). Questi due sono gli angoli principali che risolvono l'equazione. Ovviamente, tutti gli angoli maggiori di un angolo giro che hanno come angoli principali i due angoli soluzione saranno anche soluzioni dell'equazione. Quindi le soluzioni dell'equazione si potranno scrivere come:

X=α+2Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)

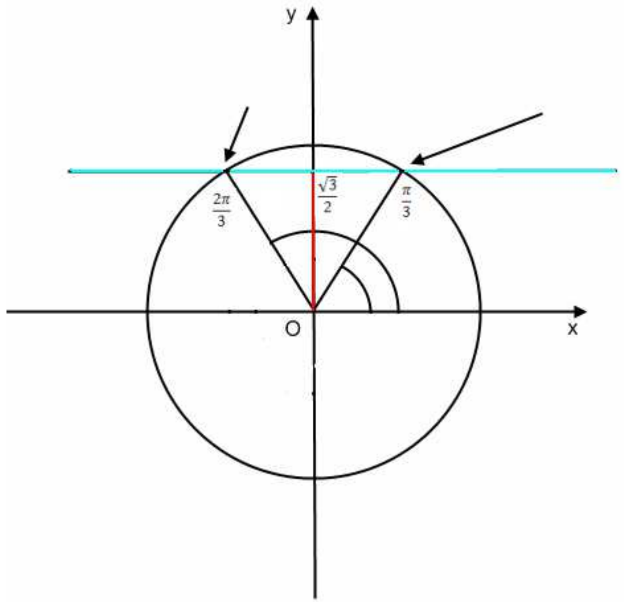
X=(π-α)+2Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Ovvero in gradi

X=α+K360 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

X=(180°-α)+K360 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Esempio: Risolvere l'equazione Sen X=√3/2



Siccome il seno si può leggere sull'asse delle ordinate, tracciamo in rosso il segmento corrispondente alla misura √3/2 sull'asse Y a partire dall'origine O verso l'alto (+); Tracciamo poi in azzurro la retta perpendicolare all'asse y (o parallela all'asse X) e passante per il punto √3/2. Le intersezioni di questa retta con la circonferenza (indicate con le frecce) ci forniscono gli angoli il cui seno è √3/2. Questo valore è uno di quelli noti e corrisponde agli angoli di 60° e (180°-60°)=120° cioè in radianti π/3 e 2π/3.

La soluzione dell'equazione si scriverà:

X= π/3+2Kπ	con K numero intero (±1;±2;±3;……)
X= (π-π/3)+2Kπ=2π/3 +2Kπ	con K numero intero (±1;±2;±3;……)
Ovvero in gradi	
X=60°+K360	con K numero intero (±1;±2;±3;……)
X=(180°-60)+K360=120°+K360	con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Quando il valore di **b** non è uno dei valori tabulati tra quelli degli angoli principali noti è possibile risolvere ugualmente l'equazione attraverso una funzione presente su tutte le calcolatrici scientifiche che restituisce il valore dell'angolo in gradi (modalità DEG nelle calcolatrici scientifiche) o radianti (RAD, modalità RAD nelle calcolatrici scientifiche) Questa funzione si chiama ARCSEN o SEN $^{-1}$ (o ARCSIN o SIN^{-1}).
In questo caso la soluzione dell'equazione generica si scriverà come segue:

X= ARCSEN(b)+2Kπ	con K numero intero (±1;±2;±3;……)
X= (π-ARCSEN(b))+2Kπ	con K numero intero (±1;±2;±3;……)
Ovvero in gradi	
X=ARCSEN(b)°+K360	con K numero intero (±1;±2;±3;……)
X=(180°-ARCSEN(b)°)+K360	con K numero intero (±1;±2;±3;……)

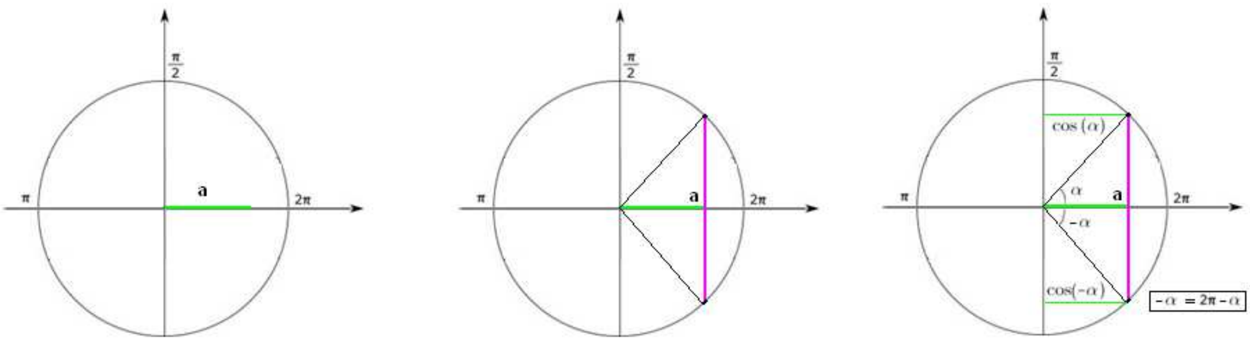
CASO 2: CosX=a

Per prima cosa bisogna verificare se il valore di **a** rispetta la condizione di essere un valore compreso tra -1 e 1: per cui il primo passo è verificare se -1≤**a**≤1.

Se **a** non rispetta questa prima condizione si può immediatamente concludere che l'equazione proposta non ha soluzione ed è impossibile.

Se invece **a** rispetta questa condizione allora esistono due, o uno, angoli orientati minori di un angolo giro che hanno per coseno il valore **a**.

Una semplice costruzione grafica ci permette di identificarli



Ricordando che il cos è l'ascissa dei punti della circonferenza goniometrica Il primo passo è tracciare sull'asse delle X un segmento di misura │a│ (questo simbolo si chiama valore assoluto di **a** e rappresenta il valore di **a** senza segno). Essendo l'asse X orientata verso destra se **a** è positivo tracceremo il segmento verso destra, se **a** è negativo verso il basso. (il segmento di misura **a** è stato tracciato in verde)

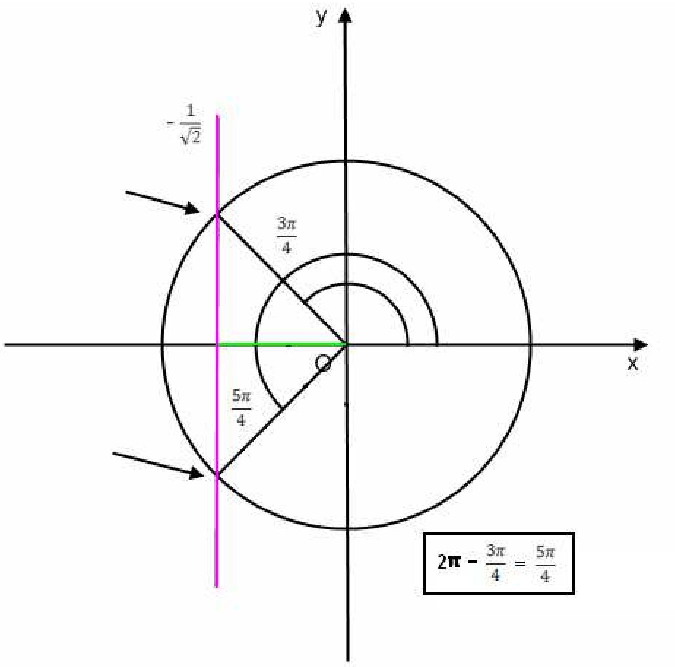
Dall'estremo libero di **a** tracciamo poi una parallela all'asse Y (o la perpendicolare all'asse X). Questa retta interseca la circonferenza goniometrica in due punti corrispondenti agli angoli che hanno per coseno il valore a. Detto α l'angolo più piccolo (nel primo quadrante in questo caso) il secondo angolo è (2π-α=- α). Questi due sono gli angoli principali che risolvono l'equazione. Ovviamente, tutti gli angoli maggiori di un angolo giro che hanno come angoli principali i due angoli soluzione saranno anche soluzioni dell'equazione. Quindi le soluzioni dell'equazione si potranno scrivere come:

$X=\alpha+2K\pi$ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
$X=(2\pi-\alpha)+2K\pi= -\alpha+2K\pi$ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
O in una forma più compatta:
$X=\pm \alpha+2K\pi$ con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Ovvero in gradi

$X=\alpha+K360$ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
$X=(360°-\alpha)+K360= -\alpha+K360$ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
O in una forma più compatta:
$X=\pm \alpha+K360$ con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Esempio: Risolvere l’equazione Cos X=-1/√2



Il coseno si riporta sull’asse delle ascisse, per cui tracciamo in verde il segmento corrispondente alla misura 1/√2 sull’asse X a partire dall’origine O ed alla sinistra essendo il segno negativo; tracciamo poi in fucsia la retta perpendicolare all’asse X (o parallela all’asse Y) e passante per il punto -1/√2; le intersezioni di questa retta con la circonferenza (indicate con le frecce) ci forniscono immediatamente gli angoli il cui coseno è -1/√2. Questo valore è uno di quelli noti corrispondenti agli angoli di 135° e (360°-135°)=225°, o in radianti 3π/4 e 5π/4 (o -3π/4); la soluzione dell’equazione si e’:

X= 3π/4+2Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
X= (2π-3π/4)+2Kπ=5π/4 +2Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
o in forma compatta X=±3π/4+2Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Ovvero in gradi
X=135°+K360 con K numero intero (±1;±2;±3;……)
X=(360°-135°)+K360=225°+K360 con K numero intero (±1;±2;±3;……)
O in forma compatta: X=±135°+K360 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Quando il valore di **a** non è uno dei valori tabulati tra quelli degli angoli principali noti è possibile risolvere ugualmente l’equazione attraverso una funzione presente su tutte le calcolatrici scientifiche che restituisce il valore dell’angolo in gradi (modalità DEG nelle calcolatrici scientifiche) o radianti (RAD, modalità RAD nelle calcolatrici scientifiche) Questa funzione si chiama ARCCOS o COS^{-1}.

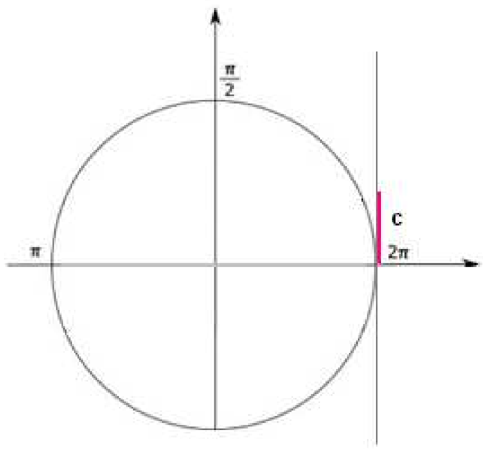
In questo caso la soluzione dell’equazione generica si scriverà come segue:
X= ±ARCCOS(b)+2Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
Ovvero in gradi
X=±ARCCOS(b)°+K360 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

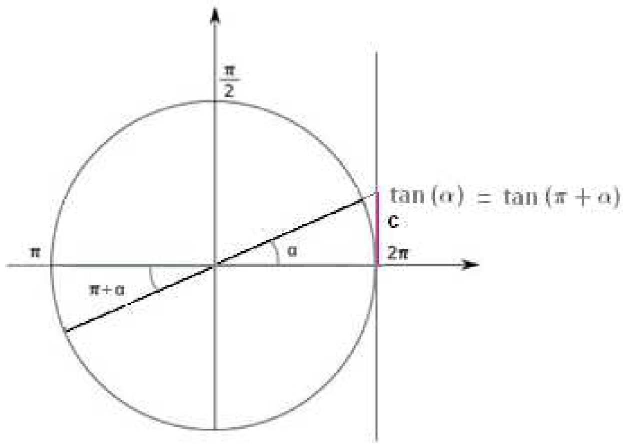
CASO 3: TanX=c

In questo caso c può essere qualunque valore reale ma X non potrà valere 90+K180 ovvero in radianti π/2 +Kπ con K numero intero.

Esistono due angoli orientati minori di un angolo giro che hanno per coseno il valore **c**. essi differiscono per 180° (o π)

Una semplice costruzione grafica ci permette di identificarli



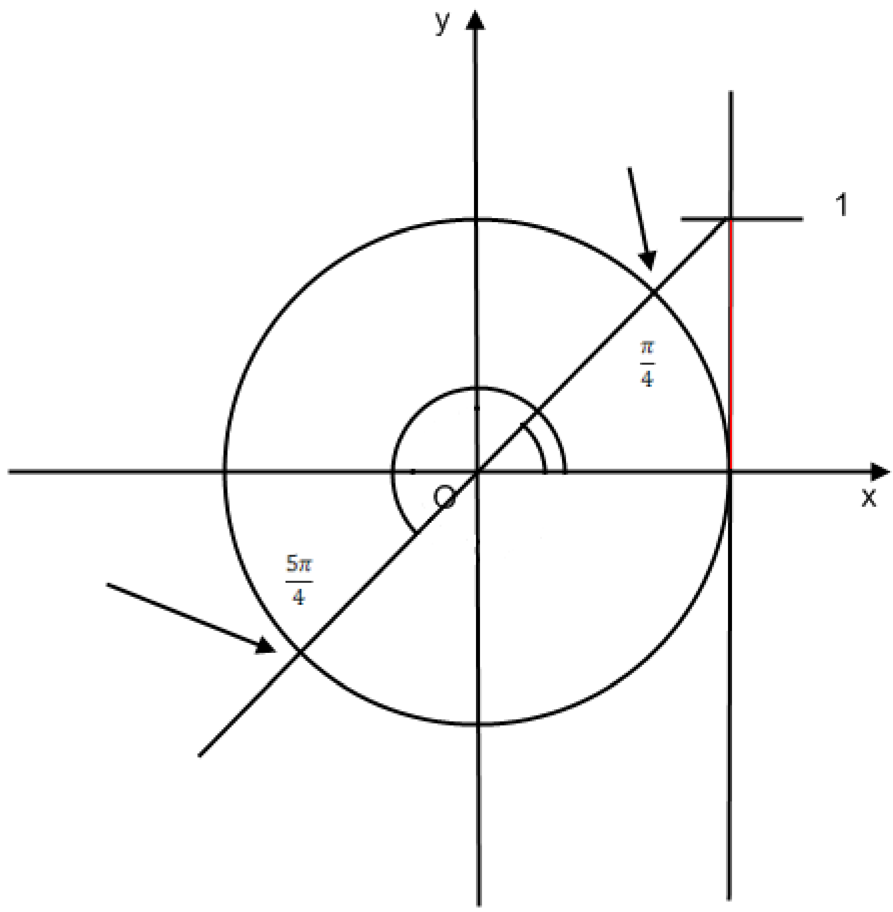


La Tangente è l’ordinata del punto di intersezione tra il prolungamento del secondo lato dell’angolo e la tangente alla circonferenza nel punto (1,0). Tracciamo quindi un segmento di lunghezza c verso l’alto (+) o verso il baso (-) lungo la tangente come in figura.

Dall’estremo libero di **c** tracciamo poi il segmento che lo unisce al centro O e prolunghiamolo alla sinistra fino ed intersecare la circonferenza. Questo segmento interseca la circonferenza goniometrica in due punti corrispondenti agli angoli che hanno per tangente il valore c. Detto α l’angolo più piccolo (nel primo quadrante in questo caso) il secondo angolo è π+α. Questi due sono gli angoli principali che risolvono l’equazione. Ovviamente, tutti gli angoli maggiori di un angolo giro che hanno come angoli principali i due angoli soluzione saranno anche soluzioni dell’equazione. In questo caso però essendo la Tangente una funzione di periodicità π (180°) le soluzioni dell’equazione si potranno scrivere come:

X=α+Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
Ovvero in gradi
X=α+K180 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Risolvere l’equazione TanX=1
Riportiamo il valore 1 sulla retta tangente alla circonferenza goniometrica pasante per il punto (1,0). Possiamo individuare gli angoli che hanno 1 per tangente, come mostrato nella figura, cioè congiungendo l’estremo libero del segmento di misura 1 con l’origine e centro della circonferenza goniometrica e prolungando il segmento a sinistra fino a intersecare la circonferenza goniometrica stessa.



Il valore 1 per la tangente è uno dei valori noti e corrisponde all'angolo di 45° (π/4) e 180°+45°=225° (5π/4). Essi differiscono di 180° (π), essendo tale il periodo della funzione tangente. Tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

X= π/4+Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
Ovvero in gradi
X= 45°+K180 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

Quando il valore di **c** non è uno dei valori tabulati tra quelli degli angoli principali noti è possibile risolvere ugualmente l'equazione attraverso una funzione presente su tutte le calcolatrici scientifiche che restituisce il valore dell'angolo in gradi (modalità DEG nelle calcolatrici scientifiche) o radianti (RAD, modalità RAD nelle calcolatrici scientifiche) Questa funzione si chiama ARCTAN o TAN^{-1} o ARCTG o TG^{-1}.

In questo caso la soluzione dell'equazione generica si scriverà come segue:
X= ARCTAN(c)+Kπ con K numero intero (±1;±2;±3;……)
Ovvero in gradi
X=ARCTAN(c)°+K180 con K numero intero (±1;±2;±3;……)

EQUAZIONI RICONDUCIBILI ALLE EQUAZIONI ELEMENTARI

Nei casi più semplici di equazioni riconducibili ad equazioni elementari è sufficiente applicare i principi di equivalenza per trasformare l'equazione in una equazione elementare.

Ad esempio: $2SenX=-\sqrt{3}$ dividendo per 2 ambo i membri si ottiene

$SenX=-\sqrt{3}/2$ che è una equazione elementare.

Un secondo tipo di equazioni riconducibile alle equazioni elementari è quello in cui sia il primo che il secondo membro sono costituiti di due stesse funzioni goniometriche di angoli che sono espressioni (ad esempio polinomi o frazioni algebriche) nell'incognita X. Chiamiamo α(x) e β(x) le due espressioni; Esse si risolvono con le formule risolutive delle equazioni elementari sostituendo α(x) a x e β(x) all'angolo α. Si presentano 3 casi:

$Sen\ \alpha(x) = Sen\ \beta(x)$; $Cos\ \alpha(x) = Cos\ \beta(x)$; $Tan\ \alpha(x) = Tan\ \beta(x)$;

Soluzione di $Sen\ \alpha(x) = Sen\ \beta(x)$:

In gradi	in radianti
$\alpha(x) = \beta(x) + K360$	$\alpha(x) = \beta(x) + 2K\pi$
$\alpha(x) = 180 - \beta(x) + K360$	$\alpha(x) = 180° - \beta(x) + 2K\pi$

Soluzione di $Cos\ \alpha(x) = Cos\ \beta(x)$:

In gradi	in radianti
$\alpha(x) = \pm\beta(x) + K360$	$\alpha(x) = \pm\beta(x) + 2K\pi$

Soluzione di $Tan\ \alpha(x) = Tan\ \beta(x)$:

In gradi	in radianti
$\alpha(x) = \beta(x) + K180$	$\alpha(x) = \beta(x) + K\pi$

Esempi:

1)Sen (5x+1°)=Sen(4x+8°): si hanno

1) $5x+1°=4x+8°+K360° \rightarrow 5x-4x=-1°+8°+K360 \rightarrow x=7°+K360$
2) $5x+1°=180°-4x-8°+K360° \rightarrow 5x+4x=-1°+180°-8° +K360 \rightarrow 9x=171+K360$

   Dividendo ambo i membri per 9 si ha: $x=19°+K40$

2)Cos 2x= cos (x-π/3): si ha

$$2x=\pm(x-\pi/3)+2K\pi= \begin{cases} 2x= x-\pi/3+2K\pi \rightarrow 2x-x=-\pi/3+2K\pi \rightarrow x=-\pi/3+2K\pi \\ 2x=-x+\pi/3+2K\pi \rightarrow 2x+x=\pi/3+2K\pi \rightarrow 3x=\pi/3+2K\pi \rightarrow X= \pi/9+2K\pi/3 \end{cases}$$

3)Tan (x/2)=Tan (x-π/5): si ha

$x/2=x-\pi/5+K\pi \rightarrow x/2-x=-\pi/5+K\pi \rightarrow -x/2=-\pi/5+K\pi \rightarrow x=2\pi/5+2k\pi$

Applicando poi le formule degli archi associati ad un angolo è possibile ricondurre ad equazioni elementari o a equazioni riconducibili alle elementari molti tipi di equazioni. Illustro alcuni esempi e poi sintetizzo le varie possibilità in uno schema riassuntivo.

1)Sen 3x=-sen(x-$\frac{\pi}{2}$): $applicando\ la\ proprietà\ degli\ angoli\ opposti\ sen(-\alpha) = -sen\alpha$

$\rightarrow Sen\ 3x = Sen\ [-(x-\frac{\pi}{2})] \rightarrow Sen\ 3x = Sen\ (\frac{\pi}{2}-x)$

Questa è una equazione riconducibile a quelle elementari e la soluzione è:

$$3x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x + 2K\pi \rightarrow 3x + x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2K\pi = \frac{\pi}{2} + x + 2K\pi \rightarrow 3x - x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + K\pi \end{cases}$$

2)Sen 5x=Cos(180°-2x):

Per trasformare Sen in Cos usiamo gli angoli complementari: Sen5x=Cos(90°-5x)

L'equazione diventa Cos(90°-5x)=Cos(180°-2x) che ha la seguente soluzione

90°-5x=$\pm(180° - 2x) + K360$ → =180°-2x+K360° (1)

→ =-180°+2x+K360° (2)

1) -5x+2x=180°-90°+K360 →-3x=90°+K360° →3x=-90°+K360° → x=-30°+K120°
2) -5x-2x=-180°-90°+K360 →-7x=-270°+K360° →7x=270+K360° →x=$\frac{270}{7} + k\frac{360}{7}$

$\frac{270°}{7} \approx 38°,57 \approx 38°\ 34'\ 17''$ $\frac{360°}{7} \approx 51{,}43 \approx 51°\ 25'\ 53''$

3)Sen(30°-X)=-Cos5x:

applicando prima le proprietà degli angoli supplementari -cos5x=Cos(180°-5x)

E poi per le formule degli angoli complementari

Cos(180-5x)=Sen[90-(180-5x)]=Sen(90°-180°+5x)=Sen(-90°+5x)

Sen(30°-x)=Sen(-90°+5x)

30°-x=-90°+5x+K360° → -x-5x=-90°-30°+K360° (3)

30°-x=180°-(-90°+5x)+K360 → -x=180°+90°-30°-5x+K360 (4)

3) -6x=120°+K360° → 6x=-120°+K360° →x=-20°+K60°
4) –x+5x=240°+K360° → 4x=240°+K360° → x=60°+K90°

4)$\boldsymbol{Tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = Cotgx}$ Ricordando le proprietà degli angoli complementari

Trasformiamo $CotgX = Tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e otteniamo

$$Tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = Tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + K\pi \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + K\pi \rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + K\pi$$

Concludendo: $x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

TABELLA RIASSUNTIVA POSSIBILI RICONDUZIONI AD EQUAZIONI ELEMENTARI

Equazione	**Equazioni equivalenti**	
	***x* in gradi**	***x* in radianti**
$\operatorname{sen}\alpha(x) = -\operatorname{sen}\beta(x)$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}[-\beta(x)]$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}[-\beta(x)]$
$\operatorname{sen}\alpha(x) = \cos\beta(x)$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}[90^\circ - \beta(x)]$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \beta(x)\right]$
$\operatorname{sen}\alpha(x) = -\cos\beta(x)$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = -\operatorname{sen}[90^\circ - \beta(x)] \to$ $\to \operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}[-90^\circ + \beta(x)]$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = -\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \beta(x)\right] \to$ $\to \operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}\left[-\frac{\pi}{2} + \beta(x)\right]$
$\operatorname{sen}^2\alpha(x) = \operatorname{sen}^2\beta(x)$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}\beta(x)$ $\operatorname{sen}\alpha(x) = -\operatorname{sen}\beta(x)$	$\operatorname{sen}\alpha(x) = \operatorname{sen}\beta(x)$ $\operatorname{sen}\alpha(x) = -\operatorname{sen}\beta(x)$
$\cos\alpha(x) = -\cos\beta(x)$	$\cos\alpha(x) = \cos[180^\circ - \beta(x)]$	$\cos\alpha(x) = \cos[\pi - \beta(x)]$
$\cos\alpha(x) = \operatorname{sen}\beta(x)$	$\cos\alpha(x) = \cos[90^\circ - \beta(x)]$	$\cos\alpha(x) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \beta(x)\right]$
$\cos\alpha(x) = -\operatorname{sen}\beta(x)$	$\cos\alpha(x) = \cos[90^\circ + \beta(x)]$	$\cos\alpha(x) = \cos\left[\frac{\pi}{2} + \beta(x)\right]$
$\cos^2\alpha(x) = \cos^2\beta(x)$	$\cos\alpha(x) = \cos\beta(x)$ $\cos\alpha(x) = -\cos\beta(x)$	$\cos\alpha(x) = \cos\beta(x)$ $\cos\alpha(x) = -\cos\beta(x)$
$\operatorname{tg}\alpha(x) = -\operatorname{tg}\beta(x)$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}[-\beta(x)]$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}[-\beta(x)]$
$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{ctg}\beta(x)$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}[90^\circ - \beta(x)]$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \beta(x)\right]$
$\operatorname{tg}\alpha(x) = -\operatorname{ctg}\beta(x)$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}[90^\circ + \beta(x)]$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} + \beta(x)\right]$
$\operatorname{tg}^2\alpha(x) = \operatorname{tg}^2\beta(x)$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}\beta(x)$ $\operatorname{tg}\alpha(x) = -\operatorname{tg}\beta(x)$	$\operatorname{tg}\alpha(x) = \operatorname{tg}\beta(x)$ $\operatorname{tg}\alpha(x) = -\operatorname{tg}\beta(x)$

Equazioni Algebriche in Sen x, Cos x e Tan x

Una equazione algebrica in una delle 3 funzioni goniometriche non è altro che un polinomio in una delle variabili Sen x, Cos x, o Tan x eguagliato a zero ed in cui quindi la x è l'incognita. Se il polinomio è di primo grado ricadiamo nei casi di equazioni elementari o ad esse riconducibili. Per cui focalizziamo la nostra attenzione sui gradi superiori al primo. Consideriamo l'equazione algebrica di secondo grado in Cos x che segue:
$2Cos^2x-3Cosx+1=0$
se sostituiamo temporaneamente alla funzione Cos x la variabile Y,
cioè poniamo Y=Cos x, sarà $Y^2=Cos^2x$ e l'equazione diventa
$2Y^2-3Y+1=0$ che è una equazione di secondo grado in Y che può essere risolta con i metodi noti per le equazioni di secondo grado risultando:

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \\ c=1 \end{array}\right\} \Delta=b^2-4ac=9-8=1 \rightarrow Y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}= \begin{cases} \frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\rightarrow Y=\frac{1}{2} \\ \frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1\rightarrow Y=1 \end{cases}$$

I due valori ottenuti per Y consentono di scrivere due nuove equazioni elementari che risolvono il problema iniziale
Y=Cos x= $\frac{1}{2}$ → che ha come soluzione x=±60°+K360°
Y=Cos x= 1 → che ha come soluzione x=0+K360°=K360°

In questo caso entrambe le soluzioni della equazione in Y sono valori possibili per la funzione coseno. Ovviamente è possibile che alcuni valori non siano compresi nell'intervallo [-1,1], ed in questo caso queste soluzioni devono essere scartate in quanto non accettabili come soluzioni dell'equazione iniziale.

E' anche possibile che l'equazione in Y non ammetta soluzione reale ed in questo caso anche l'equazione iniziale si dice impossibile:
ESEMPIIO **$2Sen^2x-Senx+6=0$**
Poniamo Y=SenX e quindi $Y^2=Sen^2x$
L'equazione diventa $2Y^2-y+6=0$ sarà $\Delta=b^2-4ac=1-48=-47$ → l'equazione è impossibile

EQUAZIONI LINEARI IN SEN X e COS X

Si definisce equazione goniometrica lineare in Sen x e Cos x è una equazione del tipo:
a Sen x + b Cos x = c in cui a, b e c sono valori numerici noti.

Se uno tra **a** e **b** fosse 0 l'equazione sarebbe riconducibile ad una equazione elementare, quindi consideriamo solo i casi in cui sia **a** che **b** siano diversi da 0.

Possiamo avere due casi: nel primo caso c è 0.
Se c=0 l'equazione si dice **Omogenea** e si risolve dividendo ambo i membri per Cos x.
a Sen x + b Cos x = 0 dividendo per Cos x risulta: $a\frac{Sen\ x}{Cos\ x} + b\frac{Cos\ x}{Cos\ x} = 0$
Ricordando che $\frac{Sen\ x}{Cos\ x} = \tan x$ → a Tan x + b = 0 equazione elementare in Tan x
Es. Sen x-√3Cos x=0 → $\frac{Sen\ x}{Cos\ x} + \sqrt{3}\frac{Cos\ x}{Cos\ x} = 0 \rightarrow \tan x + \sqrt{3} = 0 \rightarrow \tan x = -\sqrt{3}$
E quindi x=-π/3+Kπ+

Nel secondo caso c è diverso da zero e sono possibili due metodi
Il primo metodo prevede l'utilizzo delle formule parametriche di seno e coseno rispetto a
t= tan $\frac{X}{2}$ che riscriviamo per comodità $Sen\ x = \frac{2t}{1+t^2}$ $Cos\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
Con queste sostituzioni la generica equazione diventa

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \rightarrow \frac{2at + b(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{c(1+t^2)}{1+t^2} \rightarrow 2at + b(1-t^2) = c(1+t^2)$$

Equazione di secondo grado in t. Una volta risolta l'equazione le soluzioni t1 e t2si sostituiscono alla t e si risolvono le due equazioni elementari Tan$\frac{X}{2}$ =t1 e Tan$\frac{X}{2}$ =t2
Attenzione che quando si applicano le formule parametriche si escludono alcuni valori di X che poi si dovranno verificare come possibili soluzioni: i valori sono: x=180°+K360

Esempio Sen x-Cos x=1 sostituendo le formule parametriche si ha

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \rightarrow \frac{2t-(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)}{1+t^2} \rightarrow 2t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \rightarrow$$

$$2t - 1 + t^2 - 1 - t^2 = 0 \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow 2t = 2 \rightarrow t = 1$$

Da cui Tan $\frac{X}{2}$= 1 → x/2=45°+K180 → x=90°+K360
Proviamo adesso se gli angoli x=180°+K360 possono essere soluzioni sostituendo i relativi valori di seno e coseno nella equazione iniziale:
0-(-1)=1 cioè 1=1 che è vera. Ciò significa che anche x=180+K360 è soluzione dell'equazione.

Il Secondo metodo prevede invece l'utilizzo della relazione fondamentale della goniometria per costruire un sistema tra questa relazione e l'equazione. Il sistema può essere poi risolto per sostituzione. Volendo risolvere l'equazione Sen x + Cos x =1
Facciamo sistema

$$\begin{cases} \text{Sen } x + \text{Cos } x = 1 \\ \text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Sen } x = 1 - \text{Cos } x \\ (1-\text{Cos } x)^2 + \text{Cos}^2 x = 1 \rightarrow 1+\text{Cos}^2 x - 2\text{Cos}x + \text{Cos}^2 x - 1 = 0 \end{cases}$$

$2Cos^2x-2\ Cosx=0 \rightarrow 2Cosx(Cosx-1)=0$

$Cosx=0 \rightarrow X=\frac{\pi}{2}+K\pi$

$Cosx-1=0 \rightarrow Cosx=1 \rightarrow x=0+K\pi$

CENNO ALLE EQUAZIONI OMOGENEE DI SECONDO GRADO
Si tratta di equazioni del tipo
$aSen^2x+bSenxCosx+cCos^2x=0$ oppure $aSen^2x+bSenxCosx+cCos^2x=d$
Nel primo caso, se a o c hanno valore 0 l'equazione si può risolvere tramite raccoglimento a fattor commune e legge dell'annullamento del prodotto.
Invece se ne a ne c sono zero basta dividere per Cos^2x e trasformare l'equazione in una equazione di secondo grado in TanX.

Anche nel secondo caso è possinile trasformare l'equazione in una equazione equivalente alla prima. Basta considerare che è possibile scrivere d come
$d(Sen^2x+Cos^2x)= dSen^2x+dCos^2x$, portare entrambi a primo membro e sommarli ai due termini in Sen^2x e Cos^2x riottenendo una equazione omogenea come la precedente.