MODULO 3 – LEZIONE 3 parte 2

Trigonometria: La risoluzione dei triangoli.

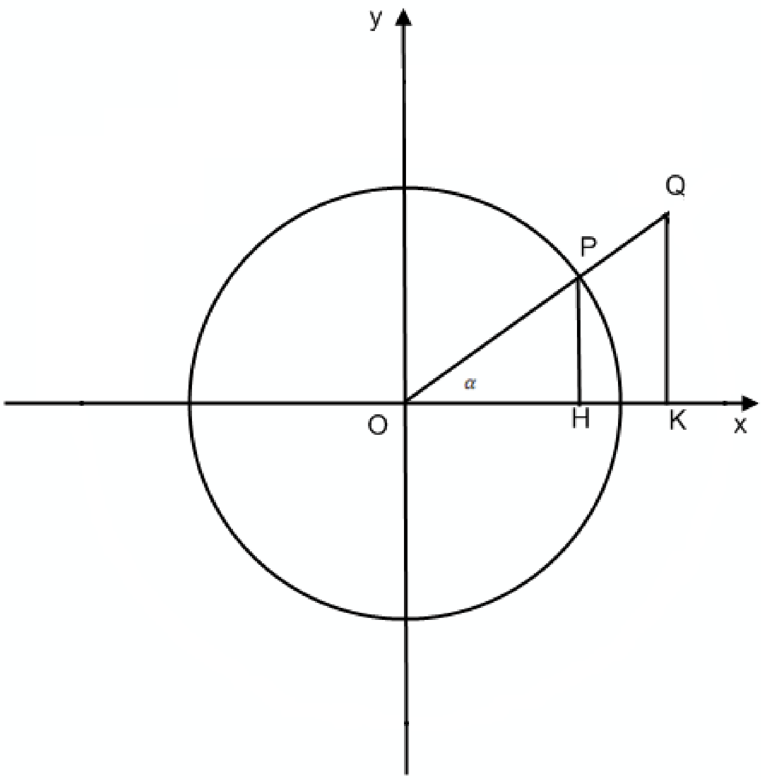
Scopo della trigonometria è la risoluzione di un triangolo a partire da un numero minimo di informazioni sul triangolo steso che come sappiamo è 3.

Iniziamo dai triangoli rettangoli.

Nel triangolo rettangolo una informazione è già nota, un angolo è retto. Quindi bastano altre due informazioni tra cui la misura di un lato per poter risolvere il triangolo.

Con riferimento al seguente disegno che è relativo al triangolo rettangolo OQK che è simile al triangolo iscritto nel primo quadrante della circonferenza goniometrica

Valgono le seguenti formule



$$sin\alpha = \frac{QK}{OQ}$$

$$cos\alpha = \frac{OK}{OQ}$$

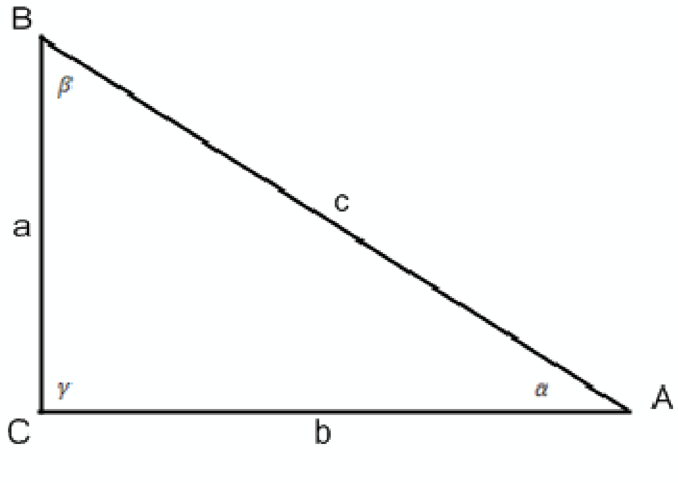
$$tg\alpha = \frac{QK}{OK}$$

Dato un triangolo rettangolo, detto α uno dei suoi angoli acuti, Senα è dato dal rapporto tra il cateto opposto ad e l'ipotenusa, mentre Cosα è dato dal rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa.

Dato un triangolo rettangolo, detto α uno dei suoi angoli acuti, la Tan α è data dal rapporto tra il cateto opposto ad e il cateto adiacente, mentre la Cotg α è data dal rapporto tra il cateto adiacente e il cateto opposto.

Valgono ovviamente anche le relative formule inverse.

Riassumendo: dato un generico triangolo rettangolo



$$sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

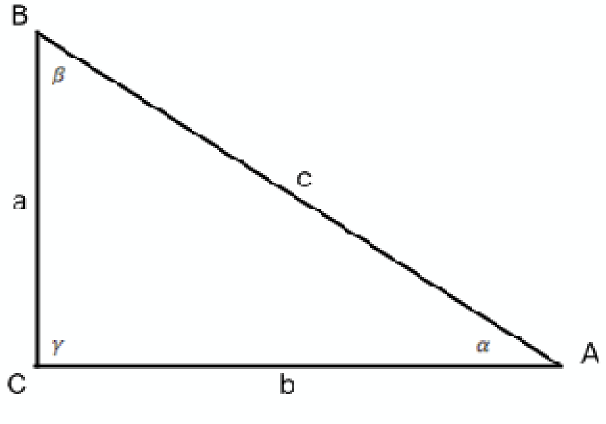
Dalle proprietà appena scritte possiamo ricavare le formule che ci permettono di risolvere un triangolo rettangolo, cioè di determinarne tutti gli elementi (lati e angoli) una volta noti, oltre all'angolo retto, due di essi, che non siano tutti e due angoli.

Con riferimento alla figura precedente invertendo le formule si ottengono immediatamente le seguenti proprietà fondamentali.

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è pari alla misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto, o per il coseno dell'angolo adiacente.

In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è pari alla misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto, o per la cotangente dell'angolo adiacente.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per affrontare il problema della risoluzione dei triangoli rettangoli. Nei seguenti sottoparagrafi affronteremo tutti i casi che si possono verificare e faremo sempre riferimento alla figura sotto riportata.



Si possono presentare 4 casi in cui sono noti o l'ipotenusa ed uno degli angoli acuti, o un cateto ed uno degli angoli acuti, o l'ipotenusa e un cateto o 2 cateti, come segue:

Noti l'angolo α e l'ipotenusa c: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\quad a = c \cdot sin\alpha$ $\quad b = c \cdot cos\alpha$

Noti l'angolo α e il cateto a: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\quad b = a \cdot tg\beta$ $\quad c = \frac{a}{sin\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Noti l'ipotenusa c e il cateto a: $\alpha = arcsin\frac{a}{c}$ $\quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\quad b = csin\beta$

Noti i cateti a e b si può calcolare c col teorema di Pitagora e procedere come il caso precedente oppure si può calcolare $\alpha = arcTan\frac{a}{b}$ $\quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\quad c = \frac{b}{sin\beta}$

ESEMPI:

Triangolo rettangolo con α=63°, c=4: Bisogna determinare β, a e b

$\beta = 90° - 63° = 27°$

$a = c \cdot sin63° = 4 \cdot 0.89 = 3.56$

$b = c \cdot cos63° = 4 \cdot 0.45 = 1.8.$

Triangolo rettangolo con b=6 e α=20°: Bisogna determinare a, c, e β

$a = b \cdot tg\alpha = 6 \cdot tg20° = 6 \cdot 0.36 = 2.16.$

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 20° = 70°$

$$c = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{2.16}{0.34} = 6.35$$

Triangolo rettangolo con a=2.5 e c=4: Determinare α, β e b

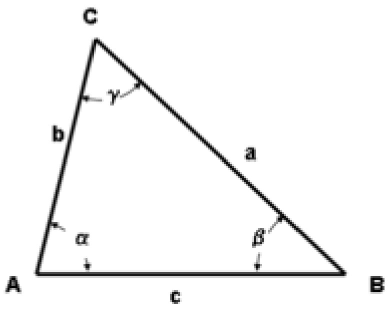
$\alpha = arcsin\frac{2.5}{4} = 38.7°$ $\quad \beta = 90° - \alpha = 51.3°$ $\quad b = csin51.3° = 3.12$

TEOREMA DELLA CORDA:
in una circonferenza la misura di una corda lc è uguale al prodotto del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza α che insistono sull'arco sotteso alla corda:

lc=2rsenα.

Teorema dei seni (o di Eulero)

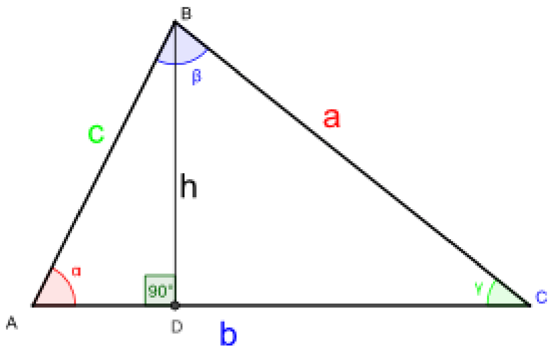
In un triangolo qualsiasi ABC come quello rappresentato nella figura sotto, il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante ed uguale alla misura del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo
Vale cioè



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

Teorema delle proiezioni

In un triangolo qualunque, la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti delle misure di ciascuno degli altri due per il coseno degli angoli che essi formano con il primo:



$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$
$$b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$$

Teorema del coseno (o di Carnot)

Con riferimento alla stessa figura del teorema delle proiezioni: In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il *coseno* dell'angolo fra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

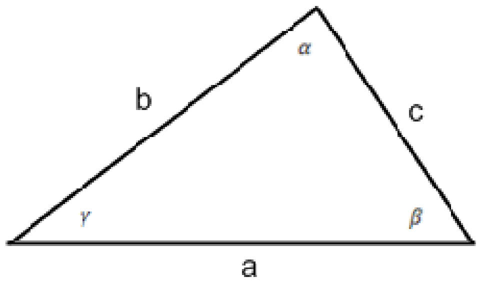
Da queste calcolando le radici quadrate si possono ottenere i singoli lati o esplicitando le formule rispetto agli angoli i singoli angoli con la funzione ARCCOS.

Nota. Il teorema di Carnot generalizza il Teorema di Pitagora, a cui si riduce se si considera un triangolo rettangolo.

CON QUESTI 3 TEOREMI È POSSIBILE LA RISOLUZIONE DI UN QUALUNQUE TRIANGOLO NOTI 3 ELEMENTI DI CUI UN LATO.

ESEMPI DI RISOLUZIONE DI TRIANGOLI QUALUNQUE.

1) Risolvere un triangolo sapendo che un lato misura 18 metri e gli angoli ad esso adiacenti sono di 43° e 65°



$a = 18, \gamma = 43°$ e $\beta = 65°$

Terzo angolo: $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 43° - 65° = 72°$

Poi dal teorema dei seni: $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{b}{sen\,\beta}$ si esplicita b ricavando:

$$b = \frac{a\,sen\,\beta}{sen\,\alpha} = \frac{18\,sen\,65°}{sen\,72°} = \frac{18 \cdot 0.9063}{0.951} = 17.15$$

E analogamente da $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{c}{sen\,\gamma}$ si trova c:

$$c = \frac{a\,sen\,\gamma}{sen\,\alpha} = \frac{18\,sen\,43°}{sen\,72°} = \frac{18 \cdot 0.6819}{0.951} = 12.91$$

Due lati di un triangolo misurano a = 3 m e b = 2.5 m e l’angolo tra essi compreso è $\gamma = 52°$. Determinare il terzo lato c.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{3^2 + 2.5^2 - 2\cdot 3\cdot 2.5\cdot \cos 52°} = \sqrt{9 + 6.25 - 9.23} = 2.45$$

AREA DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE:

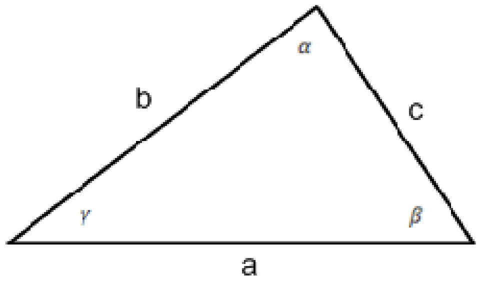
Dato un triangolo qualsiasi come quello mostrato in, note le lunghezze di due suoi lati (ad esempio a e b) e l'ampiezza dell'angolo tra essi compreso (in questo caso γ), l'area del triangolo è pari al prodotto dei due lati conosciuti per il seno dell'angolo tra essi compreso diviso 2, ovvero:

Atriangolo =$\frac{absen\gamma}{2}$

Infine una tabella riassuntiva di tutte le formule che abbiamo appreso per la risoluzione dei triangoli

Argomento	Formula
Proprietà dei triangoli	$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ $c > b \to \gamma > \alpha$
Triangolo rettangolo	$b = a\sin\beta$ $c = a\sin\beta$ $b = c\tan\beta$ $c = b\cot\beta$
Triangolo generico	$A = \frac{1}{2}a\,b\,\sin\gamma$
Teorema delle proiezioni	$a = b\,\cos\gamma + c\,\cos\beta$ $b = c\,\cos\alpha + a\,\cos\gamma$ $c = a\,\cos\beta + b\,\cos\alpha$
Teorema di Carnot	$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$
Teorema dei seni	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Altri esercizi svolti:
Del triangolo in figura sono noti il lato c=6 e gli angoli $\alpha = 40\ e\ \beta = 60$.



In tal caso si può determinare subito per differenza l'angolo mancante:

$$\gamma = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ.$$

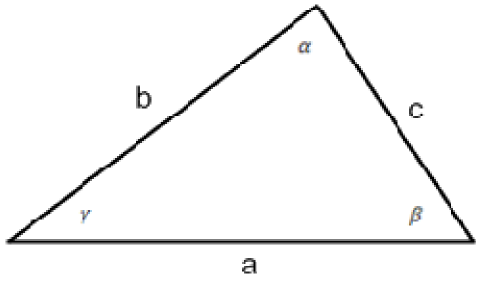
Poi, con il teorema dei seni si possono determinare gli altri lati del triangolo:

$$\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{c}{\sin 80^\circ} \implies a = 6 \cdot \frac{0,64}{0,98} = 3,91.$$

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 80^\circ} \implies b = 6 \cdot \frac{0,87}{0,98} = 5,32.$$

Se invece sono noti due angoli ed un lato non compreso tra i due angoli uno degli angoli noti si oppone al lato dato, dunque si può applicare subito il teorema dei seni per calcolare un secondo lato. Infine per differenza si determina il terzo angolo e, sempre con il teorema dei seni il terzo lato. Il problema risulta quindi identico al precedente.

Si risolva il triangolo di cui sono noti i lati b=23, c=31 e α=30°.



In tal caso si usa il teorema di Carnot per determinare la lunghezza del terzo lato:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha = 529 + 961 - 1426 \cdot 0{,}87 = 249{,}38.$$

Dunque $a = \sqrt{249{,}38} = 15{,}79.$

A questo punto si può applicare il teorema dei seni per calcolare l'ampiezza di un altro angolo:

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin\beta} \implies \sin\beta = \frac{b}{a}\ \sin 30^\circ,$$

dunque $\sin\beta = \frac{23}{15{,}79}\frac{1}{2} = 0{,}73$,

pertanto $\beta = \arcsin 0{,}73 = 46{,}74^\circ$.

A questo punto per differenza si calcola il rimanente angolo:

$$\gamma = 180^\circ - (30^\circ + 46{,}74^\circ) = 103{,}25^\circ.$$

Si risolva il triangolo di cui si conoscono i lati b=15 e c=12 , e l'angolo β=120° .

In questo caso bisogna prima applicare il teorema dei seni:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \implies \sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta \implies \sin\gamma = \frac{12}{15}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

quindi

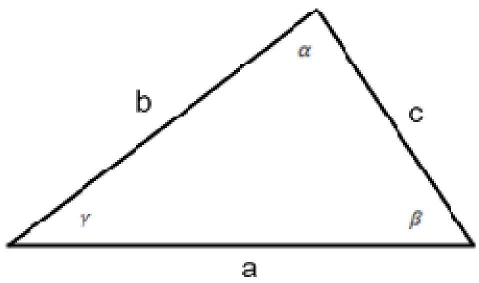
$$\gamma = \arcsin\left(\frac{2}{5}\sqrt{3}\right) = 43{,}85^\circ.$$

Per differenza si calcola il terzo angolo:

$$\alpha = 180^\circ - (120^\circ + 43{,}85^\circ) = 16{,}14^\circ,$$

ed infine applicando Carnot si calcola il terzo lato:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 23{,}18 \implies a = 4{,}81.$$



Si risolva il triangolo del quale si conoscono le misure dei tre lati a=20, b=18 e c=30

In questo caso bisogna applicare la formula inversa del teorema di Carnot:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{824}{1080} = 0{,}76 \,.$$

quindi $\alpha = 40{,}27^\circ$.

A questo punto si può ripetere il procedimento per gli altri angoli o possiamo applicare il teorema dei seni per trovare gli altri angoli.