LO SCOPO DELLA TRIGONOMETRIA

Un triangolo è un poligono con 6 elementi principali: 3 lati, e 3 angoli interni.

Scopo della trigonometria è quello di poter determinare le misure di tutti gli elementi di un triangolo a partire dalla conoscenza di un numero minimo di essi. **Il numero minimo di questi elementi è 3 di cui almeno un lato.**

Se ricordate vi sono 3 criteri di congruenza dei triangoli (o di uguaglianza)

> Due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo compreso
> Due triangoli sono uguali se hanno uguali due angoli ed il lato compreso
> (o anche uno qualunque dei lati)
> Due triangoli sono uguali se hanno uguali tutti e tre i lati

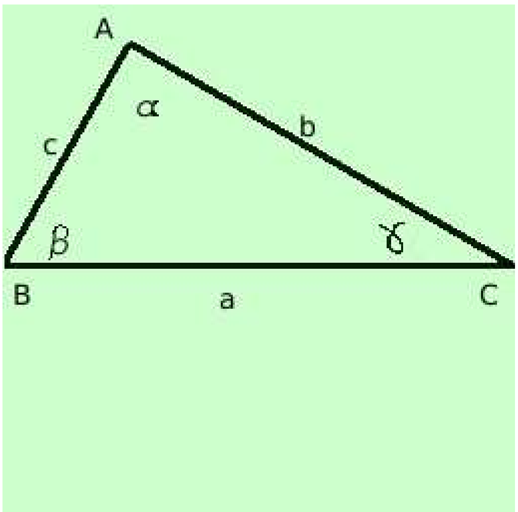
Se per poter dire che due triangoli sono uguali, basta accertare che hanno 3 elementi uguali, **di cui almeno un lato**, significa che :

conoscere la misura di 3 elementi di un triangolo di cui almeno un lato basta per poter determinare la misura tutti gli altri elementi, cioe' lati ed angoli mancanti .

Questo processo prende il nome di **RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO**

Quindi la trigonometria fornisce quegli strumenti che permettono di risolvere un triangolo conoscendo 3 elementi di cui almeno un lato

In un triangolo qualunque convenzionalmente indicheremo i VERTICI con le lettere maiuscole dell'alfabeto **A, B, C**;
indicheremo gli ANGOLI INTERNI con le lettere dell'alfabeto greco **α**, **β, γ** corrispondenti ai vertici **A, B, C** cioe'




**α** sara' sempre nel vertice A,

**β** sara' sempre nel vertice B

**γ** sempre nel vertice C

Infine indicheremo i lati con le lettere minuscole dell'alfabeto a, b c in modo che il lato abbia la stessa lettera del vertice opposto
quindi il lato BC opposto al vertice A si chiamerà a
quindi il lato AB opposto al vertice C si chiamerà c
quindi il lato AC opposto al vertice B si chiamerà b

La trigonometria per molto tempo e' stata una disciplina matematica di straordinaria importanza perché prima dell'introduzione del calcolo numerico e dei logaritmi, le formule di trigonometria erano usate per trasformare prodotti in somme e quindi semplificare i calcoli; le stesse formule sono la base per lo studio di tutte le trasformazioni di rotazione e quindi ogni movimento di rototraslazione senza trigonometria non potrebbe essere studiato né controllato.

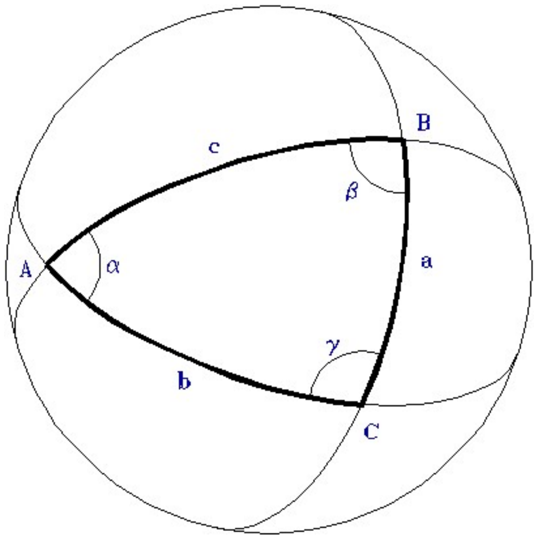
E' evidente che per la navigazione aerea essa è di fondamentale importanza.

Per andare da un punto ad un altro della superficie terrestre, sul mare, ed ancora di più nel cielo o nello spazio è possibile seguire diversi percorsi ed è utile, sapere determinare il percorso più breve per andare da un punto ad un altro.

Questo percorso più breve sul geoide terrestre è rappresentato dall'arco di circonferenza massimo che unisce il punto A al punto B che prende il nome di ***arco ortodromico*** e rappresenta la linea di *minima distanza* tra i due punti su una sfera.

Lo studio dell'ortodromia ha un valore rilevante, essendo impiegata dai programmi dei navigatori.

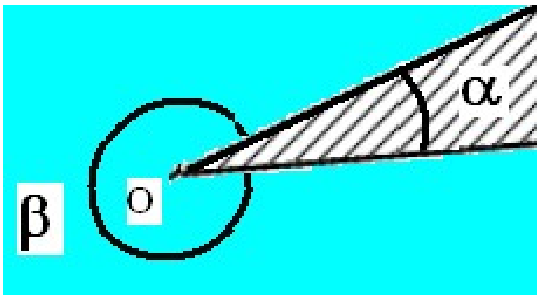
Le formule che permettono la risoluzione dei problemi di ortodromia derivano dallo studio del cosiddetto triangolo sferico, formato dall'arco di ortodromia *b* congiungente i punti A e C di figura e dagli archi di meridiano passanti per A e per C ( rispettivamente *c* ed *a* in figura ). Una situazione molto simile allo studio del triangolo con la trigonometria.

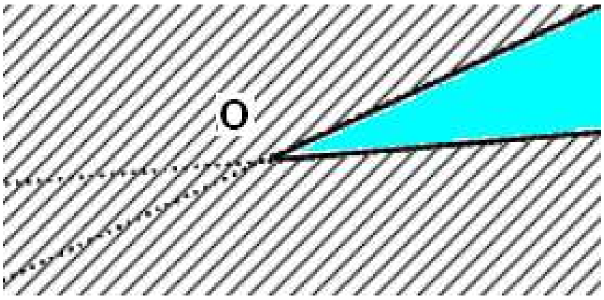


**Angoli, Angoli Orientati e loro misura; generalizzazione del concetto di angolo**

La Goniometria è la Scienza della misura degli angoli: deriva dalla proprietà del cerchio che gli angoli al centro e gli archi corrispondenti sono direttamente proporzionali.

Ricordiamo che si chiama **angolo ciascuna delle parti in cui il piano è diviso da** due semirette con la stessa origine.



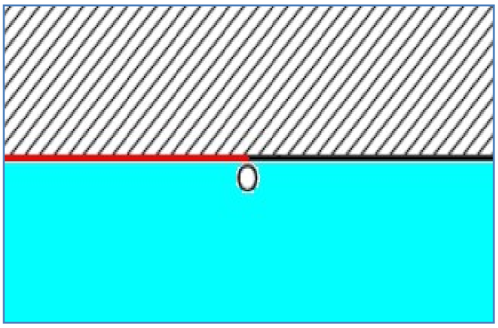

Se disegnamo quindi due semirette con l'origine in comune, queste, individuano due regioni distinte del piano: nella prima figura è evidenziata quella che non contiene i prolungamenti delle semirette stesse. In questo caso si parla di **angolo convesso** $\alpha$.

Se scegliamo l'altra parte del piano, quella che contiene i prolungamenti delle semirette (tratteggiate nella seconda figura), abbiamo invece **l'angolo concavo** $\beta$.

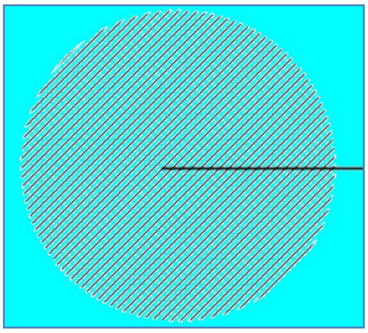
Se le due semirette giacciono una sul prolungamento dell'altra, l'angolo è detto Piatto e coincide con uno dei due semipiani.

Se invece le semirette sono coincidenti, i due angoli sono uno costituito dalle due sole semirette detto angolo nullo, l'altro che invece coincide con l'intero piano e viene chiamato angolo Giro

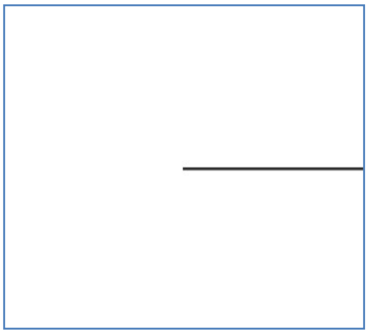
Angoli Piatti




Angolo Giro



Angolo nullo

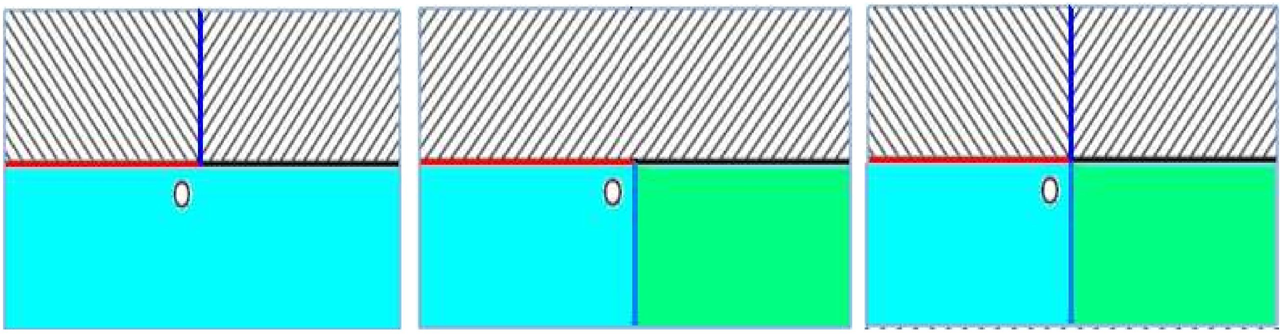


Infine introduciamo l'angolo Retto attraverso la definizione della bisettrice di un angolo.

Bisettrice di un angolo è quell'unica semiretta che divide l'angolo in due angoli uguali.

Se partiamo da un angolo piatto e disegniamo la sua bisettrice otterremo due angoli uguali ciascuno detto angolo retto. Due rette che, intersecandosi, formano quattro angoli retti si dicono perpendicolari.

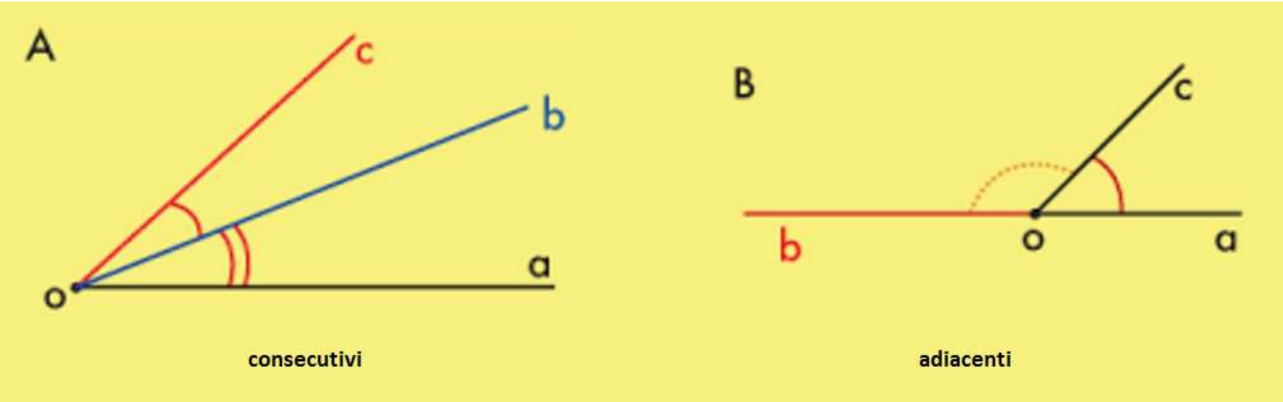
Due Angoli Retti Rette Perpendicolari




Due Angoli Retti

Si dicono **complementari** due angoli la cui somma è uguale a un angolo retto;
si i dicono **supplementari** due angoli la cui somma è pari a un angolo piatto;
si dicono **esplementari** due angoli la cui somma è pari a un angolo giro (quest'ultima definizione è a mio parere molto controversa e va usata solo su specifica richiesta).

Si dicono **<u>consecutivi</u>** due angoli che hanno il vertice ed uno solo dei due lati in comune. Due angoli consecutivi si dicono adiacenti se i lati non comuni giacciono sulla stessa retta.

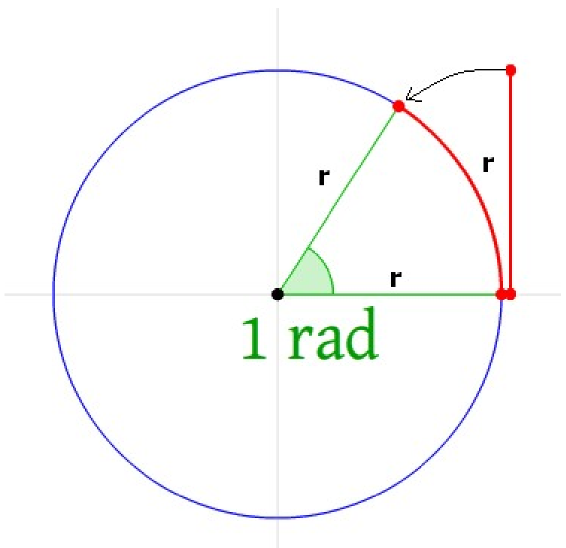


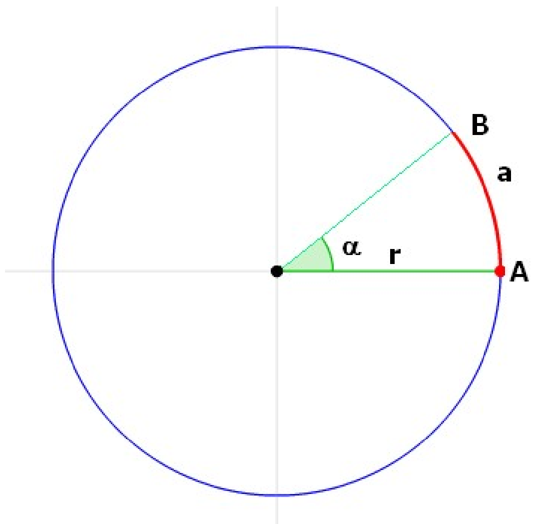

MISURA DELL'AMPIEZZA DEGLI ANGOLI
Dati due angoli è possibile confrontati e stabilire quale è maggiore. Se due angoli sono uguali, si dice che hanno la stessa ampiezza: l'ampiezza di un angolo può essere indicata con una lettera dell'alfabeto greco.
Per la misura dell'ampiezza di un angolo si può procedere con diversi metodi, quelli più usati sono due. Come per altre grandezze fisiche, si sceglie una unità di misura (cioè un angolo la cui ampiezza è unitaria, e la misura di un angolo, rispetto all'unità scelta, è il numero di angoli unitari tra loro a due a due consecutivi contenuti nell'angolo dato.

LA MISURA IN GRADI
La più diffusa unità di misura dell'ampiezza degli angoli è il grado sessagesimale, o grado. Si dice grado sessagesimale la misura dell'ampiezza di un angolo che è la 360-esima parte di un angolo giro. Il simbolo usato per il grado è il °. Con questa convenzione l'angolo giro misura 360°, l'angolo Piatto 180°, quello retto 90°.
Vi sono due sottomultipli del grado usati nella pratica
il minuto primo, detto semplicemente minuto che è la 60esima parte del grado
il minuto secondo, detto semplicemente secondo che è la 60esima parte del minuto.

E’ possibile anche rappresentare le frazioni di grado in forma decimale: ad esempio, l’ampiezza 35° 30’ (cioè 35 gradi e mezzo, essendo 30 minuti pari a mezzo grado) si può anche scrivere come 35.5° oppure 25° e 15’, essendo 15 minuti un quarto di un grado si può scrivere come 25.25° (0.25=1/4).
Per passare dalla forma in gradi, minuti e secondi alla forma decimale, è sufficiente ricordare che un minuto è pari a 1/60 di grado, mentre un secondo è 1/60 di minuto cioè 1/3600 di grado.
Convertiamo ad esempio in forma decimale 21°27’:
moltiplicando 27 per 1/60 otteniamo la frazione di grado a cui corrispondono 27 primi cioè la parte dopo la virgola nell’espressione in forma decimale;
si ha 21° 23’=21+ 23/60 = 21+0,45= 21.45°.
Convertiamo ora 21°27’18’’. In questo caso abbiamo sia minuti che secondi: la frazione di grado rappresentata da 27’ 18’’ si ottiene moltiplicando 27 per 1/60 , e 18 per 1/3600 e poi sommando i risultati ottenuti, cioè in definitiva
21° 27’ 18’’=21+27/60+18/3600= 21+0,45+0,005=21,455°

LA MISURA IN RADIANTI
Definizione di radiante
Data una circonferenza di raggio r e un angolo al centro, e tracciamo un arco di circonferenza che abbia la misura uguale al raggio. L’angolo al centro che insiste sull’arco considerato ha ampiezza pari ad 1 radiante. Quindi l’ampiezza di un angolo che insiste su un arco  di lunghezza pari al raggio della circonferenza è un radiante.
https://it.wikipedia.org/wiki/Radiante#/media/File:Circle_radians.gif




Data una circonferenza di raggio r e un angolo al centro, che insiste su un arco AB, il rapporto tra la lunghezza di AB (a) ed r è la misura in radianti dell’angolo al centro.

$$\alpha = a / r$$

Si può dimostrare che la misura di in radianti di un angolo non dipende dal raggio della circonferenza ma solo dall'ampiezza dell'angolo. La misura in radianti è un numero puro essendo quindi il rapporto tra due lunghezze

Se l'angolo che consideriamo è l'angolo giro siccome l'arco è la circonferenza completa la sua misura è C=2 $\pi$ r e quindi dividendo per r si ottiene la misura in radianti dell'angolo giro che risulta pari a 2 $\pi$. L'angolo piatto misurerà quindi $\pi$ e l'angolo retto $\pi$ /2.
Per passare dalla misura in gradi a quella in radianti di un angolo basterà applicare la seguente proporzione $180 : \pi = \alpha^\circ : \alpha^{rad}$

E quindi: $\alpha^{rad} = \pi * \alpha^\circ / 180$

o viceversa $\alpha^\circ = 180 * \alpha^{rad} / \pi$

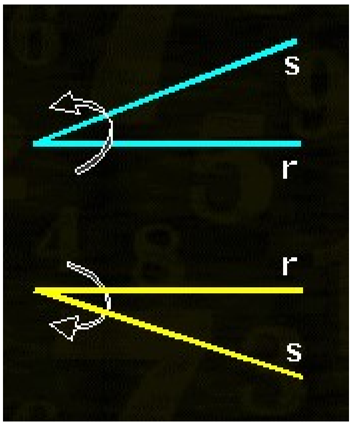
E' utile infine una piccola tabella di conversione da gradi a radianti degli angoli principali

| Gradi | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radianti | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

Angolo Orientato: Un angolo si dice orientato quando viene stabilito che uno dei due lati che lo forma deve considerarsi come primo lato.

Consideriamo r il primo lato e s il secondo lato. L'angolo orientato è rappresentato dalla superficie spazzata dal primo lato, che ruota attorno al punto O, per sovrapporsi al secondo lato.

Un angolo orientato si dice positivo se il primo lato ruota, attorno al punto O, in senso antiorario per sovrapporsi al secondo; si dice invece negativo se il primo lato ruota, attorno al punto O, in senso orario per sovrapporsi al secondo.




La misura di un angolo orientato è pari a quella del corrispondente angolo non orientato presa col segno più se la rotazione è positiva (cioè antioraria), col segno meno se la rotazione è negativa (cioè antioraria)

Generalizzazione del concetto di angolo: se immaginiamo che nella rotazione del primo lato verso il secondo lato una volta raggiunto il secondo lato la prima semiretta non si fermi e possa continuare a ruotare fino a raggiungere la sua posizione originale e poi continuare fino a raggiungere una seconda volta il secondo lato e così via, giungiamo ad una generalizzazione del concetto di angolo.

Si capisce che nella sua rotazione la semiretta ha percorso un angolo che però è maggiore di un angolo giro la misura di questo angolo è pari alla misura dell'angolo originale (detto angolo principale) più un angolo giro (se il giro è stato fatto una volta) o più 2 o 3 o n angoli giri se il giro è stato fatto 2, 3 o n volte.

La misura di questi angoli maggiori di un angolo giro si può esprimere rispetto alla misura del relativo angolo principale con la seguente formula (in gradi o in radianti)

Misura in radianti: $\alpha^{rad} + 2K\pi$ ove K è un qualsiasi numero intero (+ o – 1,2,3,4,5)

Misura in gradi: $\alpha^{\circ} + K\,360^{\circ}$ ove K è un qualsiasi numero intero (+ o – 1,2,3,4,5)

## INTRODUZIONE AL CONCETTO DI FUNZIONE

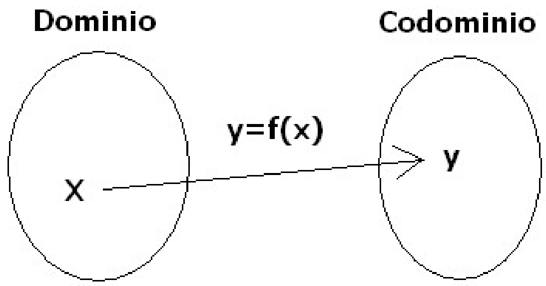
Le funzioni hanno un ruolo molto importante in tutte le scienze esatte. Il concetto di dipendenza funzionale tra due grandezze sostituisce infatti, all'interno delle teorie fisiche e matematiche, quello di causa-effetto, che riguarda direttamente gli elementi della realtà concreta.

Se si afferma, ad esempio, che la velocità di una auto dipende a parità di altre condizioni dalla quantità di combustibile che viene bruciato (e quindi da quanto premiamo sull'acceleratore) si capisce che al modificarsi della quantità di combustibile bruciato varierà la velocità dell'auto e che quindi può esistere un modello che permette di esprimere la variazione di una grandezza dipendente (la velocità) rispetto a un'altra indipendente (la quantità del combustibile che è la variabile indipendente su cui si può agire per modificare la velocità, cioè la variabile dipendete).

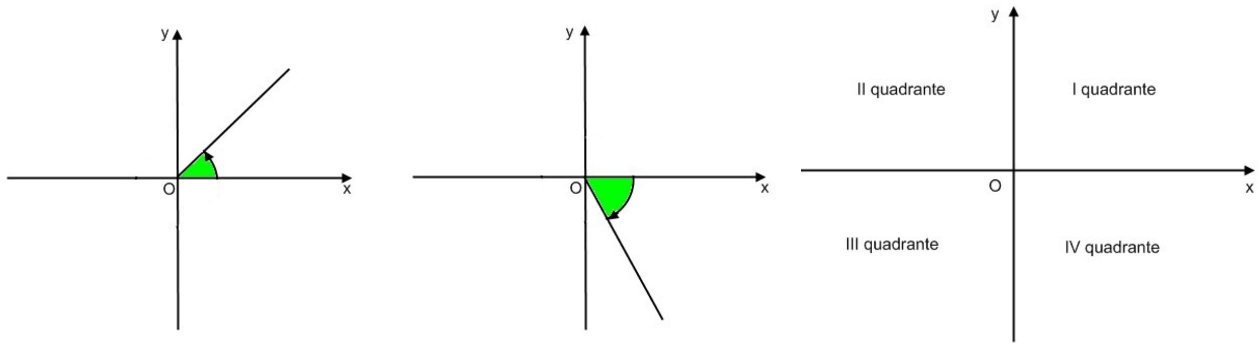
Concretamente non posso agire direttamente sulla velocità, ma posso modificare questa grandezza agendo su un'altra variabile che invece posso controllare.
Questa è evidentemente una semplificazione estrema poiché va da se che affinchè si possa parlare di dipendenza funzionale di una variabile rispetto ad un'altra è necessario che per ogni valore che può essere assegnato alla variabile indipendente, quella dipendente deve assumere un unico valore.
Non si può parlare di funzione se a parità di valore della variabile indipendente, quella dipendente potrebbe assumere due o più valori diversi.

Si parla di funzioni matematiche quando sia la variabile dipendente che la variabile indipendente possono assumere valori appartenenti ad insiemi numerici ed il modello che lega le variazioni della variabile dipendente, rispetto a quelli della variabile indipendente si può esprimere attraverso operazioni matematiche.

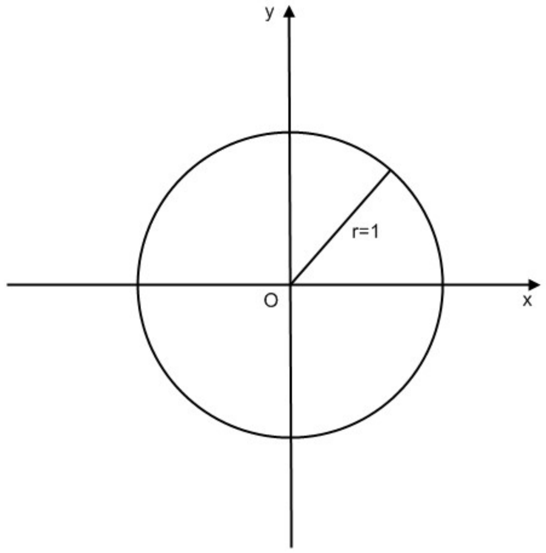
Detta y la variabile dipendente e x quella dipendente si potrà esprimere la dipendenza funzionale scrivendo: y=f(x). I valori che la variabile dipendente x può assumere costituiscono un insieme detto Dominio della funzione. I corrispondenti valori che vengono assunti dalla variabile dipendente y costituiscono un insieme detto codominio.

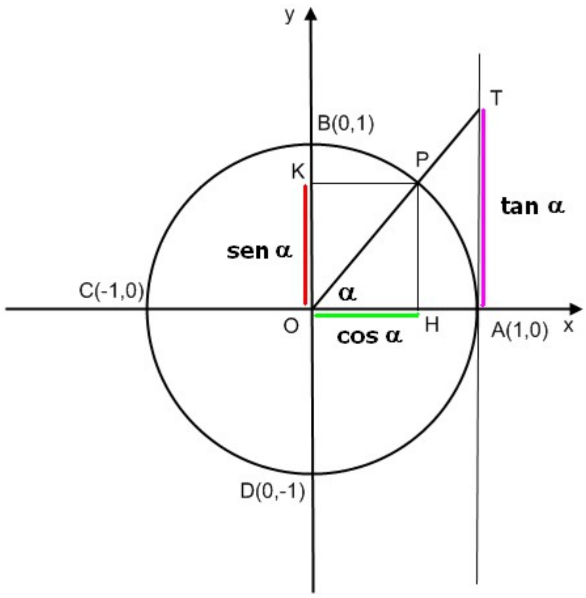



CIRCONFERENZA GONIOMETRICA
Per definire le funzioni goniometriche, è necessario disporre gli angoli su un piano cartesiano ponendo il vertice nell'origine del sistema di riferimento e facendo coincidere il primo lato con il semiasse positivo delle ascisse.
Tenendo conto di ciò e delle convenzioni sull'orientazione degli angoli, vediamo come si rappresentano un angolo positivo di $\pi/4$ (45°) e uno negativo di $-\pi/3$ (-60°).




E' opportuno ricordare che il piano cartesiano è per comodità diviso in quattro quadranti.
Si dice **circonferenza goniometrica** una circonferenza su un piano cartesiano con centro nell'origine e raggio unitario.




**Seno e coseno e tangente di un angolo orientato**

Dato un angolo orientato di ampiezza $\alpha$, disposto, secondo le convenzioni viste, su un piano cartesiano su cui sia rappresentata una circonferenza goniometrica, indichiamo con P l'intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica e chiamiamo H e K, rispettivamente, le proiezioni di P sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate e con T l'intersezione (se esiste) tra il prolungamento del secondo lato dell'angolo e la tangente alla circonferenza goniometrica condotta per il suo punto A (1,0)

Si dice **seno** dell'angolo l'ordinata del punto P ovvero la lunghezza del segmento OK

Si dice **coseno** dell'angolo l'ascissa del punto P ovvero la misura del segmento OH

Si dice **tangente** dell'angolo l'ordinata del punto T cioè la misura del segmento AT

**Non esiste la tangente per gli angoli di 90° ($\pi/2$) e 270° (3 $\pi/2$)**

Consideriamo alcuni casi di angoli particolari: Dalla figura si può comprendere che

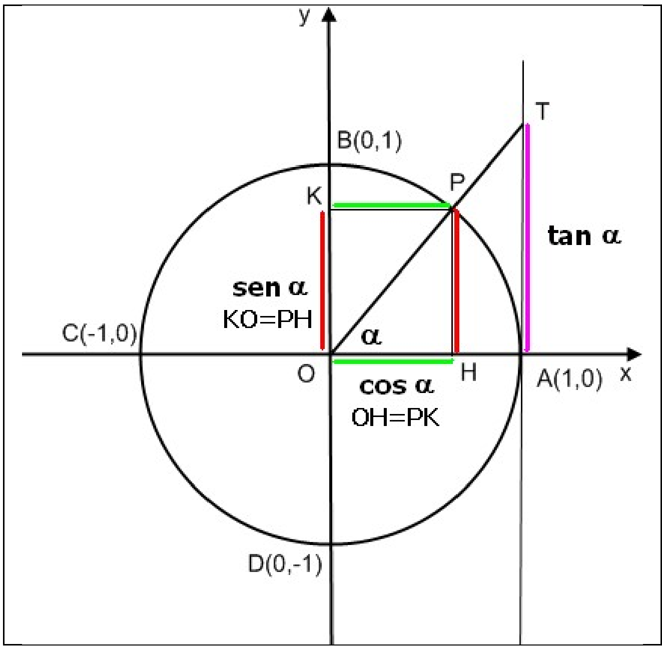
- Se l'angolo è nullo, P e T coincidono con A(1,0), pertanto:
  sin0=0 cos0=1 Tan0=0.
- Se l'angolo è $\pi/2$ (90°, angolo retto), P coincide con B(0,1) e T non esiste, pertanto:
  sin($\pi/2$)=1 cos($\pi/2$)=0 Tan($\pi/2$) NON ESISTE

• Se l'angolo è $\pi$ (180°, angolo piatto), P coincide con C(-1,0) e T con A(1,0), pertanto:
  sin$\pi$=0 cos$\pi=-1$ Tan$\pi=0$

• Se l'angolo è 3$\pi/2$ (270°), P coincide con D(0,-1) e T non esiste, pertanto:
  sin(3$\pi/2$)=$-1$ cos(3$\pi/2$)=0 Tan(3$\pi/2$) NON ESISTE

• Se l'angolo è 2$\pi$ (360° Angolo giro), P e T coincidono nuovamente con A(1,0), pertanto:
  Seno, coseno e tangente hanno gli stessi valori dell'angolo nullo.

PROPRIETA' FONDAMENTALI




Consideriamo il triangolo OHP in figura:

Esso è rettangolo in H:
la lunghezza di PH è uguale con il seno di $\alpha$ (a meno del segno),
la lunghezza di $OH$ è uguale con il coseno (sempre a meno del segno).
Applicando il teorema di Pitagora, si ha:

$PH^2+OH^2=OP^2$

Ricordando che OP=1, raggio della circonferenza goniometrica e
PH e OH sono seno coseno dell'angolo α,

si ha infine: $\mathbf{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

Questa relazione, valida per qualunque angolo, prende il nome di prima proprietà fondamentale della trigonometria e attraverso questa formula è possibile ricavare il seno di un angolo conoscendone il coseno o viceversa:

$\mathbf{\sin\alpha = \pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}$

$\mathbf{\cos\alpha = \pm\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}$

La seconda proprietà fondamentale della trigonometria dice che la tangente di un angolo è uguale al rapporto tra seno e coseno dello stesso angolo

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Questa proprietà deriva dalla similitudine dei due triangoli AHP e OAT. Ricordiamo che In due triangoli simili il rapporto tra i lati corrispondenti è costante.
Le due proprietà consentono per ogni angolo di ricavare il valore di tutte le funzioni a partire da una di esse
Vi sono infine altre 3 funzioni goniometriche che sono le funzioni inverse di Sin, Cos, e Tan; esse si chiamano Cosecante, Secante e Cotangente, in particolare

**Cosec α =1/Sin α** **Sec α=1/Cos α** **Cotg α=1/Tan α**

Infine si precisa che in alcuni testi la tangente viene indicata con Tg anziché con Tan. Conoscere il valore delle funzioni goniometriche di un angolo qualsiasi di cui sia nota l'ampiezza è la chiave per poter affrontare i problemi di trigonometria come quello della risoluzione dei triangoli. Non esistono formule che, dato un angolo qualunque, permettano di calcolarne il seno e le altre funzioni goniometriche, ma oramai anche le calcolatrici tascabili forniscono il valore delle funzioni goniometriche di ogni angolo.Esistono però degli angoli particolari e particolarmente importanti (angoli notevoli) per i quali è facile valutare le funzioni goniometriche ricorrendo a delle considerazioni geometriche. Per gli scopi di questo corso è sufficiente fornire i valori delle funzioni goniometriche per i seguenti angoli.

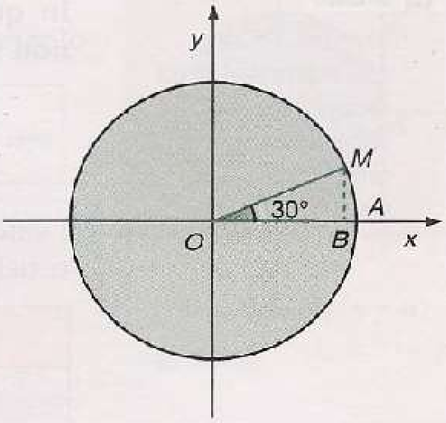
Angoli di 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°

Per gli angoli di 30°, 45° e 60°, si può calcolare facilmente il valore delle funzioni goniometriche, con l'applicazione del teorema di Pitagora e ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e che in un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30 e 60 gradi il cateto minore è metà dell'ipotenusa

Per l'angolo di 30° **($\pi/6$)**

Il triangolo rettangolo $OBM$ è la metà di un triangolo equilatero di lato $OM$

$$BM = \frac{1}{2} OM$$




da cui, passando alle misure:

$$\boxed{\mathbf{sen}\,\mathbf{30^\circ} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$

e, per le relazioni fondamentali della goniometria:

$$\mathbf{cos}\,\mathbf{30^\circ} = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

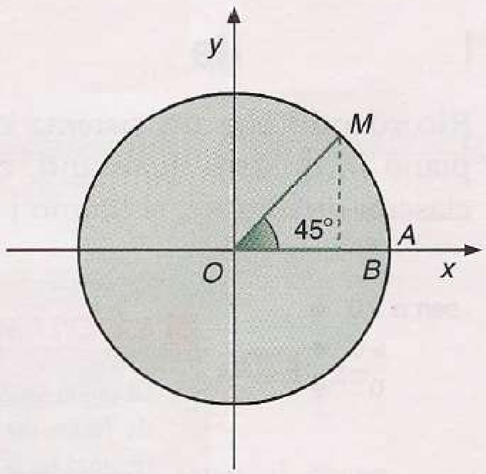
$$\mathbf{tg}\,\mathbf{30^\circ} = \frac{\mathrm{sen}\, 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

Per l'angolo di 60° con identici ragionamenti si ha:

$$\mathbf{sen}\,\mathbf{60^\circ} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} \qquad \mathbf{cos}\,\mathbf{60^\circ} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \mathbf{tg}\,\mathbf{60^\circ} = \sqrt{\mathbf{3}}$$

Infine per l'angolo di 45°

Dopo aver notato che il triangolo rettangolo *OBM* è isoscele e che, di conseguenza, $\text{sen}\,45° = \cos 45°$, dalla prima relazione fondamentale, si ha:




$$\text{sen}^2 45° + \text{sen}^2 45° = 1$$

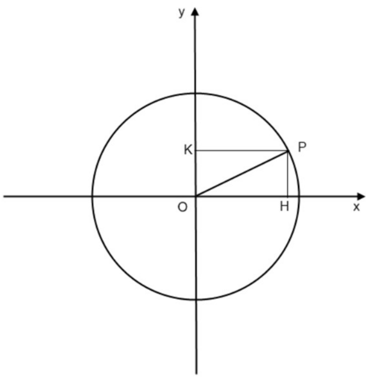
da cui:

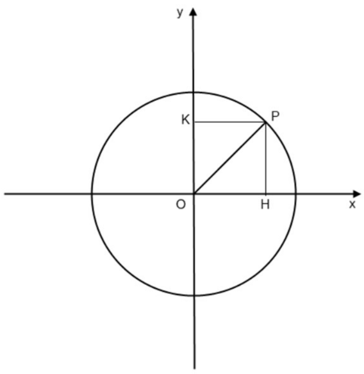
$$2\,\text{sen}^2 45° = 1$$

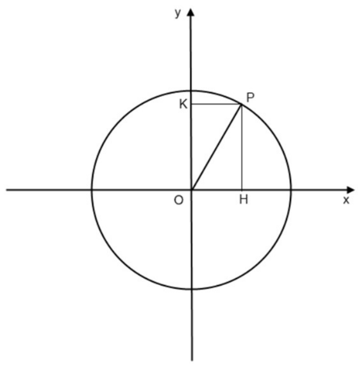
Quindi:

$$\textbf{sen}\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textbf{cos}\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textbf{tg}\,45° = 1$$

Riepilogando



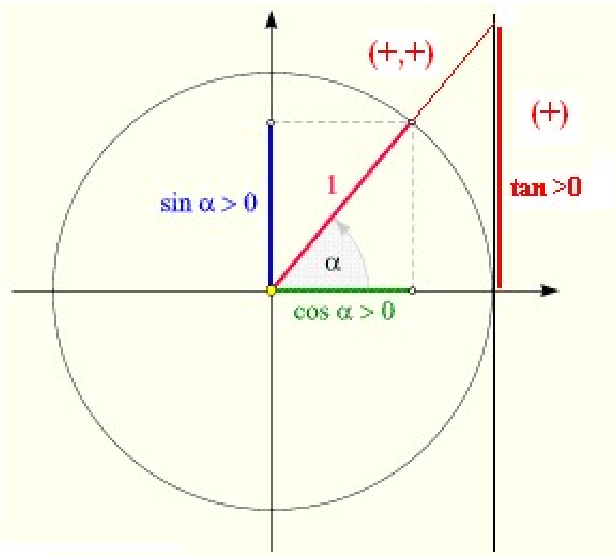




| | | |
|---|---|---|
| Sin 30° =1/2<br>Cos 30° =√3/2<br>Tan 30°=1/√3=√3/3 | Sin 45°=√2/2<br>Cos 45°=√2/2<br>Tan 45°=1 | Sin 60°=√3/2<br>Cos 60°=1/2<br>Tan 60°=√3 |

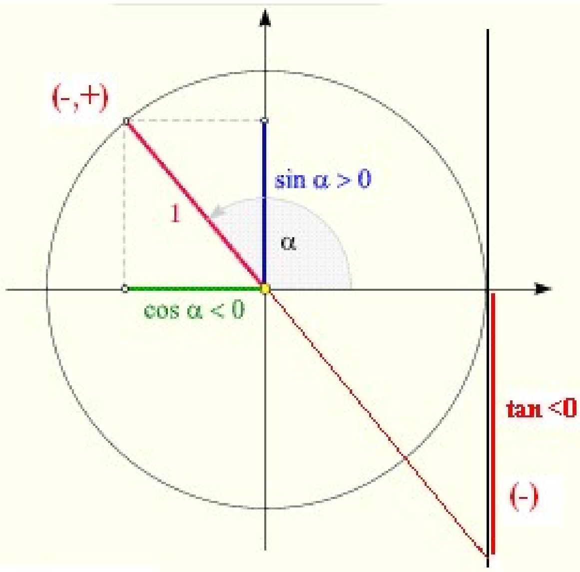
(√ è il simbolo della radice quadrata)

Gli altri angoli dell'elenco precedente hanno a meno del segno gli stesi valori delle funzioni goniometriche. Il segno può essere facilmente stabilito ricordando il segno delle coordinate cartesiane nei diversi quadranti come riasunto nella seguente immagine. I valori degli angoli vengono riportati sotto in una apposita tabella. Tabelle più complete sono disponibili presso i principali siti internet ed i manuali professionali

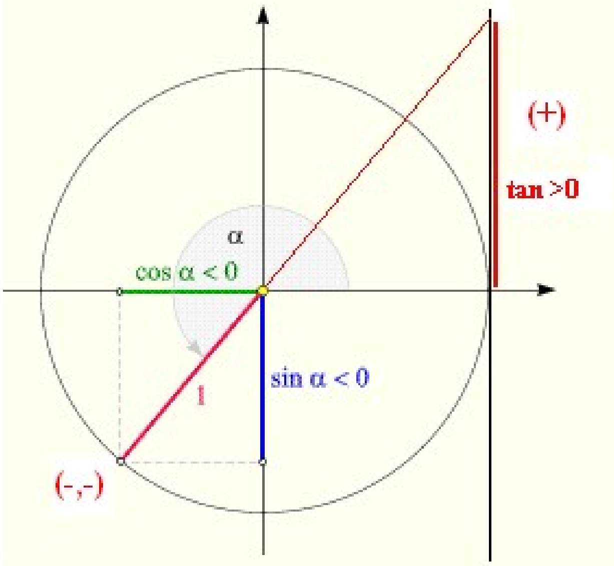
Da notare che i valori del seno e del coseno di un angolo saranno sempre compresi tra -1 e 1, mentre i valori della tangente possono andare da – infinito a + infinito (-∞, +∞)



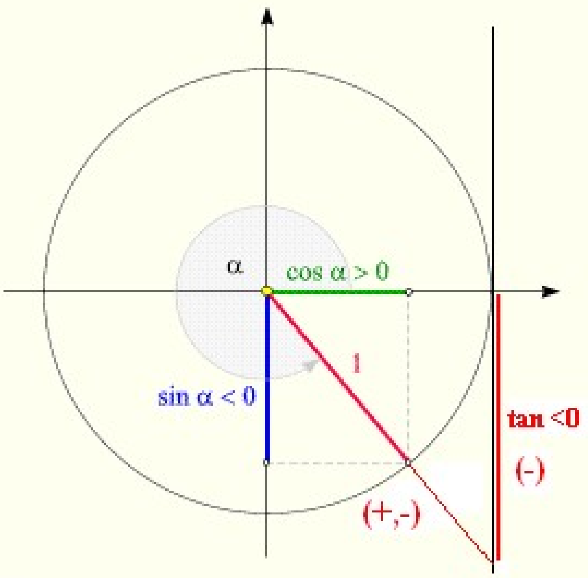

Se α è fra 0° e 90°
(il raggio è nel primo quadrante),
**sin α** e **cos α** sono entrambi **positivi**.




Se α è fra 90° e 180°
(il raggio è nel secondo quadrante),
**sin α** è **positivo** e **cos α** è **negativo**.




Se α è fra 180° e 270°
(il raggio è nel terzo quadrante),
**sin α** e **cos α** sono entrambi **negativi**.




Se α è fra 270° e 360°
(il raggio è nel quarto quadrante),
**sin α** è **negativo** e **cos α** è **positivo**.

| rad | gradi | seno | coseno | tangente | cotangente |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | [± ∞] |
| π/6 | 30 | 1 / 2 | √3 / 2 | √3 / 3 | √3 |
| π/4 | 45 | √2 / 2 | √2 / 2 | 1 | 1 |
| π/3 | 60 | √3 / 2 | 1 / 2 | √3 | √3 / 3 |
| π/2 | 90 | 1 | 0 | [± ∞] | 0 |
| 2π/3 | 120 | √3 / 2 | – 1 / 2 | – √3 | – √3 / 3 |
| 3π/4 | 135 | √2 / 2 | – √2 / 2 | – 1 | – 1 |
| 5π/6 | 150 | 1 / 2 | – √3 / 2 | – √3 / 3 | – √3 |
| π | 180 | 0 | – 1 | 0 | [± ∞] |
| 7π/6 | 210 | – 1 / 2 | – √3 / 2 | √3 / 3 | √3 |
| 5π/4 | 225 | – √2 / 2 | – √2 / 2 | 1 | 1 |
| 4π/3 | 240 | – √3 / 2 | – 1 / 2 | √3 | √3 / 3 |
| 3π/2 | 270 | – 1 | 0 | [± ∞] | 0 |
| 5π/3 | 300 | – √3 / 2 | 1 / 2 | – √3 | – √3 / 3 |
| 7π/4 | 315 | – √2 / 2 | √2 / 2 | – 1 | – 1 |
| 11π/6 | 330 | – 1 / 2 | √3 / 2 | – √3 / 3 | – √3 |
| 2π | 360 | 0 | 1 | 0 | [± ∞] |

**Grafici delle funzioni goniometriche:**
è possibile rappresentare sul piano cartesiano i grafici delle funzioni goniometriche con gli angoli espressi in Radianti. In questo caso sull'asse X si rappresenta il valore degli angoli in radianti o in gradi e sull'asse Y il valore delle rispettive funzioni goniometriche..

Si nota che i valori delle funzioni goniometriche per gli angoli maggiori di un angolo giro sono uguali ai relativi angoli principali e che quindi le funzioni goniometriche sono periodiche ed hanno un grafico che si ripete costantemente.
Poiché quindi angoli orientati che differiscono per multipli interi di un angolo giro hanno gli stessi lati e quindi gli stessi valori per le funzioni goniometriche si può comprendere che Seno e Coseno hanno un periodo di 2 $\pi$ (360°)

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + k360°) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\alpha + k360°) = \cos\alpha \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

La Tangente invece, come si può comprendere dai grafici delle pagine precedenti ripete i propri valori con un periodo di $\pi$ (180°) e quindi si potrà scrivere.

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha \quad \operatorname{tg}(\alpha + k180°) = \operatorname{tg}\alpha \text{ con } \in \mathbb{Z}$$

GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Iniziamo con il grafico della funzione seno: y=Sin x

Visto che il grafico della funzione si ripeterà regolarmente ad intervalli pari a 360° o 2 $\pi$
Prendiamo sull'asse X un intervallo corrispondente a 2 $\pi$ e a partire da questo determiniamo suddividendolo progressivamente in 2 (o in 3 parti guali) per determinare i punti corrispondenti a:

0, $\pi$/4 (45°), $\pi$/2 (90°), 3$\pi$/4 (135°), $\pi$(180°), 5$\pi$/4 (225°), 3$\pi$/2 (270°), 7$\pi$/4 (315°), 2$\pi$ (360°)

Riscriviamo nella tabella i valori della funzione seno per tutti questi angoli in ordine crescente e rappresentiamoli sul piano cartesiano.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \operatorname{sen}x$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

Risulterà il seguente grafico (che abbiamo ripetuto per due intervalli di 360° per comprendere meglio il concetto di periodicità)

GRAFICO DELLA FUNZIONE SENO: SINUSOIDE

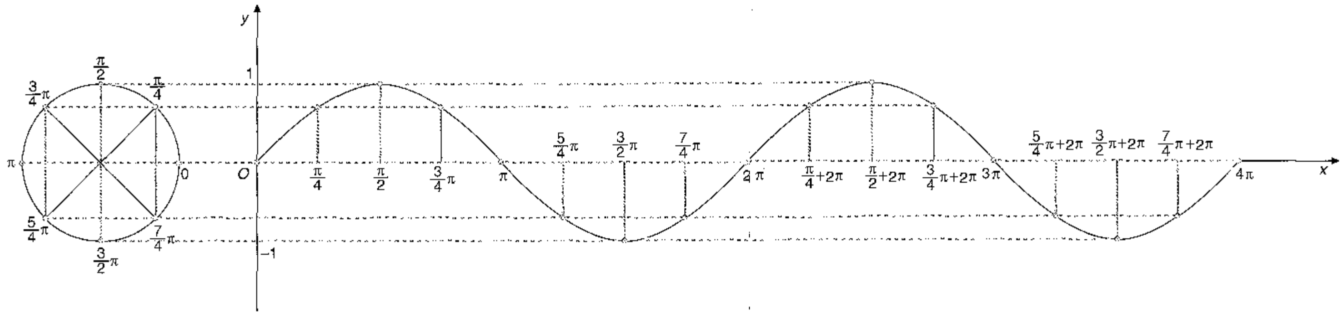


GRAFICO DELLA FUNZIONE COSENO: COSINUSOIDE
Con analogo procedimento potremo rappresentare la funzione y=Cos x (non la ripetiamo per due intervalli essendo sufficiente l'esempio precedente.

Ricaviamo la funzione coseno per gli stesi angoli

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |

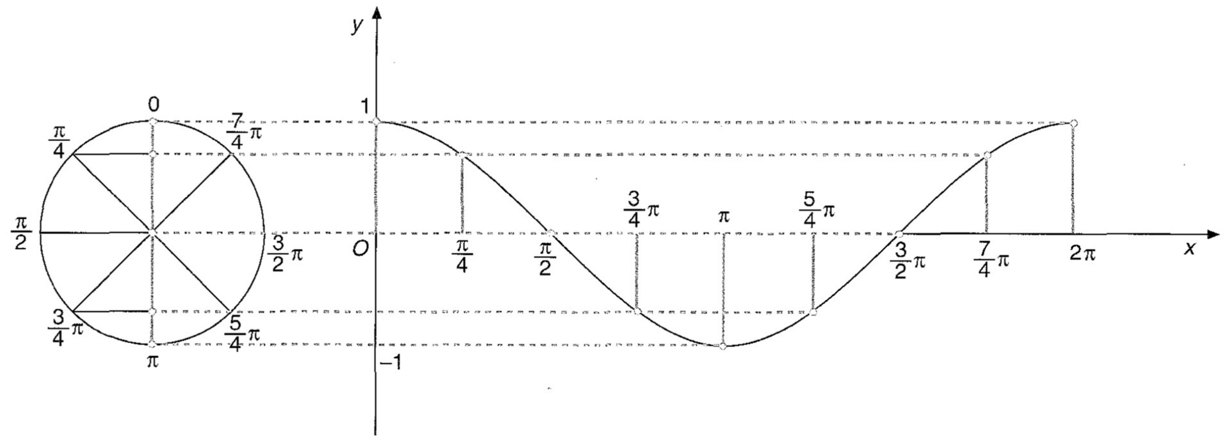
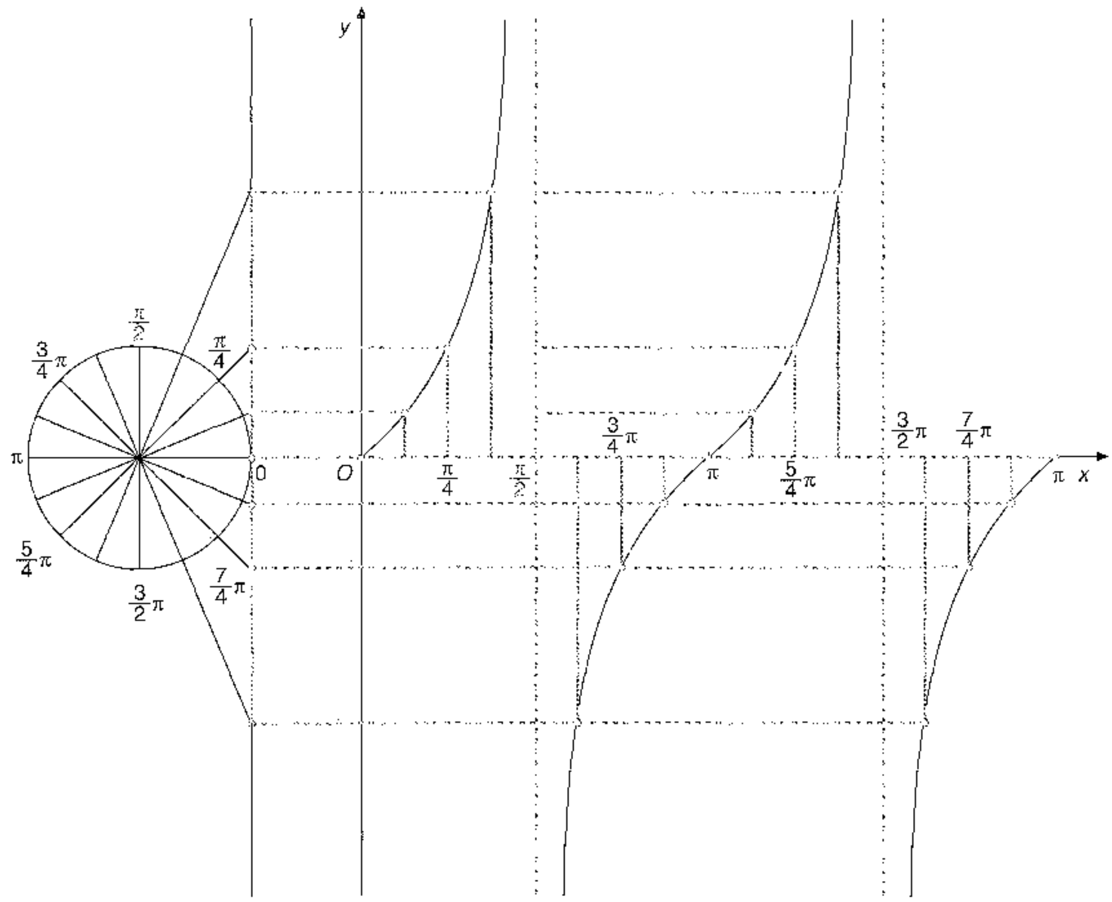


GRAFICO DELLA FUNZIONE TANGENTE: TANGENTOIDE




Come si può vedere il grafico della funzione si avvicina sia da sinistra che da destra alla retta tratteggiata parallela all'asse Y passante per il punto x=$\pi$/2 (90°)
Questa retta a cui il grafico della funzione tangente si avvicina quando l'angolo si avvicina a $\pi$/2 (90°) si chiama asintoto.

La stesa cosa succede all'avvicinarsi di x al valore 3$\pi$/2 (270°)