COME NASCONO I NUMERI COMPLESSI

Lo spunto per la nascita dei numeri complessi derivò dal tentativo di soluzione di un problema chiaramente impossibile. Dividere 10 in due parti il cui prodotto dia 40. O in altre parole: Trovare un rettangolo di perimetro 20 e di area 40.
Detti X e Y i lati del rettangolo cercato le due condizioni ci dicono che X*Y=40 e che 2(X+Y)=20 ovvero X+Y=10.
Risolvendo il sistema con la sostituzione Y=10-X si ottiene X*(10-x)=40.
Ovvero $-X^2+10X-40=0$. → $X^2-10X+40=0$
Questa equazione di secondo grado ha delta quarti=-15<0 per cui l'equazione è impossibile.

Tuttavia Gerolamo Cardano, medico e matematico del 1500 si rese conto che se per un momento considerava √(-15) come un numero normale succedeva la seguente cosa straordinaria.

Risolvendo comunque l'equazione di secondo grado risultavano le due "strane" soluzioni:
X1= 5-√(-15)   X2=5+√(-15)
Considerando le due radici negative due normali numeri e sommando le due soluzioni 5-√(-15) +5+√(-15) si semplificano le due radici di argomento negativo ed il risultato è 10, mentre moltiplicando (5-√(-15))(5+√(-15)) e applicando le regole della somma per differenza si ottiene la differenza di due quadrati: $5^2-(\sqrt{(-15)})^2 = 25-(-15)=25+15=40$.

Cardano però non si rese conto del valore di quello che aveva scoperto e prima della formalizzazione e dell'introduzione dei numeri complessi si dovette attendere il diciottesimo secolo (Euler e De Moivre) e fu infine Gauss a pubblicare le opere che fecero entrare i numeri complessi nel mondo matematico

I NUMERI COMPLESSI

Nell'insieme dei numeri reali R non è possibile risolvere l'equazione di secondo grado
$x^2+1=0 \iff x^2=-1$

Infatti il quadrato di un qualsiasi numero reale è positivo o nullo e non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato dia -1.

Volendo risolvere questa equazione si introduce un nuovo numero chiamato i, detto <u>unità immaginaria</u>, definito come la radice quadrata di -1 i=

Grazie a questo nuovo numero l'equazione di secondo grado $x^2+1=0$ ammette due soluzioni distinte $x_1=i,\ x_2=-i$: Riassumendo:

$$x^2+1=0 \iff x^2=-1 \iff x=\pm\sqrt{-1} \iff x=\pm i$$

Dopo aver introdotto l'unità immaginaria si può **definire l'insieme dei numeri complessi**, che viene indicato con la lettera $\mathbb{C}$, come l'insieme di tutti e soli i numeri della forma **a+ib** con **a** e **b** numeri reali che viene detta **Forma algebrica di un numero complesso.**

PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA DI UN NUMERO COMPLESSO

Sia z=a+ib un numero complesso.
Il numero reale **a** prende il nome di **parte reale** del numero complesso e si indica con Re (z),
il numero reale **b** si dice **parte immaginaria** del numero complesso e viene indicata con Im(z).

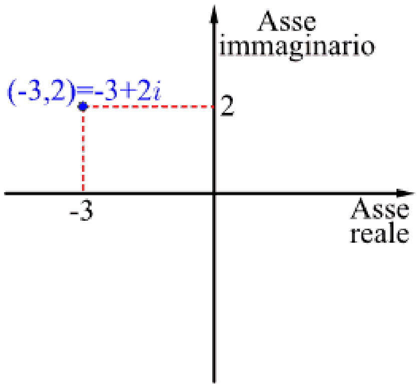
Ad esempio 3+ 2i è il numero complesso avente parte reale uguale a 3 e parte immaginaria 2, mentre 1+i ha parte reale e parte immaginaria uguali ad 1.

I numeri complessi con parte reale nulla, hanno la forma z=ib e si dicono **immaginari puri**.
Es: 4i, -5i, $\frac{3}{2}i$, $\sqrt{3}i$
I numeri complessi con parte immaginaria nulla hanno la forma z=a e sono i numeri reali.
L'insieme dei numeri reali è un <u>sottoinsieme proprio</u> dell'insieme dei numeri complessi.

PIANO DI ARGAND-GAUSS
Sappiamo che l'insieme dei numeri reali è in corrispondenza biunivoca con una retta ed abbiamo imparato a rappresentare su una retta orientata i numeri reali.
I numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano, detto **piano di Argand-Gauss**, cioè ogni numero complesso z=a+ib si può associare ad un punto del piano. Il punto associato avrà coordinate cartesiane Z(a,b)=(Re(z), Im(z)).

Quindi di Argand-Gauss è un <u>piano cartesiano</u> in cui sull'asse X si rappresenta la parte reale di un numero complesso, mentre sull'asse Y si rappresenta la parte immaginaria del numero complesso. L'asse X viene detto asse reale, l'asse Y asse immaginario.

Esempio, al numero complesso z=-3+2i corrisponde il punto di coordinate cartesiane (-3,2) come mostrato in figura



Questa corrispondenza tra numeri complessi e punti del piano è alla base di un altro modo di definire i numeri complessi come COPPIA ORDINATA di due numeri reali di cui il primo rappresenta la parte reale ed il secondo la parte immaginaria

I numeri complessi della forma (a,0) sono i numeri reali, quelli del tipo (0,b) sono gli immaginari puri.
L'**unità immaginaria i** è un numero immaginario identificato con la coppia ordinata i=(0,1).

Somma, sottrazione, prodotto di due numeri complessi:

dati due numeri complessi $z = (a,b)$ e $w = (c,d)$

La somma (o la differenza) di due numeri complessi si fa sommando (o sottraendo) le parti reali e quelle immaginarie

z+w=a+ib+c+id=a+c+i(b+d)=((a+c),(b+d))=(a+c)+i(b+d)

Si moltiplicano i due numeri complessi come segue:

la parte reale del prodotto è la differenza tra i prodotti della parte reale e della parte immaginaria, mentre la parte immaginaria è la somma dei prodotti incrociati tra le parti reali e quelle immaginarie dei due numeri

$zw = (a,b)(c,d) = (ac - bd, bc + ad)$

Questo risultato si memorizza meglio se si eseguono le moltiplicazioni tra i numeri complessi usando le proprietà del prodotto dei polinomi:

$(a + ib) \times (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Da cui si vede che la parte reale del prodotto è (ac-bd), la parte immaginaria è (ad+bc).

ELEMENTO NEUTRO, OPPOSTO, INVERSO E CONIUGATO

Nell'insieme dei numeri reali 0 e 1 sono gli elementi neutri rispetto alla somma ed al prodotto. Se a è un numero reale diverso da zero, -a è il suo opposto e $\frac{1}{a} = a^{-1}$ è il suo inverso (o reciproco). Nell'insieme dei numeri complessi possiamo definire tali quantità ed anche una in più. In particolare:

l'**elemento neutro rispetto alla somma** è il numero complesso con parte reale e parte immaginaria pari a 0 cioè 0+i0=(0,0) che, graficamente, coincide con l'origine degli assi del piano complesso.

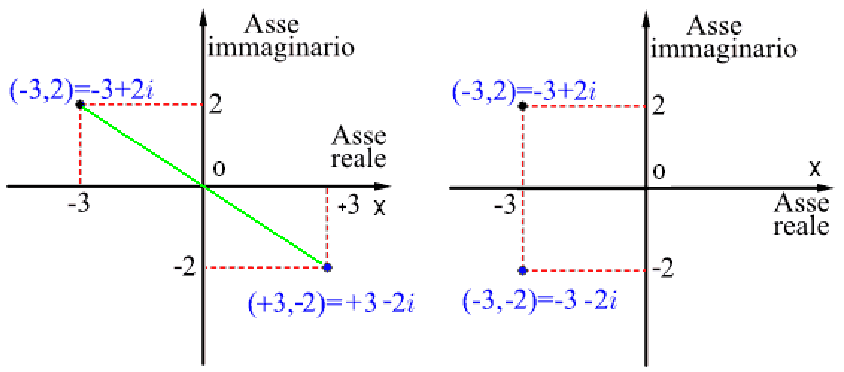
l'**opposto del numero complesso** a+ib=(a,b) è il numero complesso –a-ib=(-a,-b); graficamente l'opposto di un numero complesso è il simmetrico rispetto all'origine degli assi.

l'**elemento neutro rispetto al prodotto è il numero**; 1+i0=(1,0)

l'**inverso o reciproco** di un numero complesso z=a+ib=(a,b) è

$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = (\frac{a}{a^2+b^2}; -\frac{b}{a^2+b^2})$.

Infine, dato il numero complesso z=a+ib=(a,b) si definisce **complesso coniugato** di z e si indica con $\bar{z}$=a-ib il numero complesso $\bar{z} = (a, -b)$. Da un punto di vista grafico il coniugato di un numero complesso è il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.



NUMERO OPPOSTO
SIMMETRIA CENTRALE RISPETTO AD O

NUMERO CONIUGATO
SIMMETRIA ASSIALE RISPETTO AD X

DIVISIONE TRA DUE NUMERI COMPLESSI
Dati due numeri complessi z=a+ib e w=c+id la divisione tra i due numeri si esegue facendo il prodotto tra il numero z e l'inverso del numero w come prima definito.

CONFRONTO TRA NUMERI COMPLESSI
Due numeri complessi si dicono **uguali** se la parte reale e la parte immaginaria coincidono, ossia
a+ib=c+id solo se a=c e b=d ovvero $(a,b)=(c,d) \iff a=c \text{ e } b=d$

Però, a differenza di quanto accadeva per l'insieme dei numeri reali, non è possibile confrontare due numeri complessi ossia stabilire se uno è maggiore o minore di un altro. Esprimiamo questa proprietà dicendo che **l'insieme dei numeri complessi non è un insieme ordinato**.

LE POTENZE DI I
Un aspetto molto particolare di i è quello delle potenze di i.

$I^0=1$	$i^1=1$	$i^2=-1$	$i^3=i^2*i=-i$
$i^4=i^2*i^2=-1*(-1)=1$	$i^5=i^4*i=1*i=i$	$i^6=i^4*i^2=1*(-1)=-1$	$i^7=i^4*i^3=1*(-i)=-i$

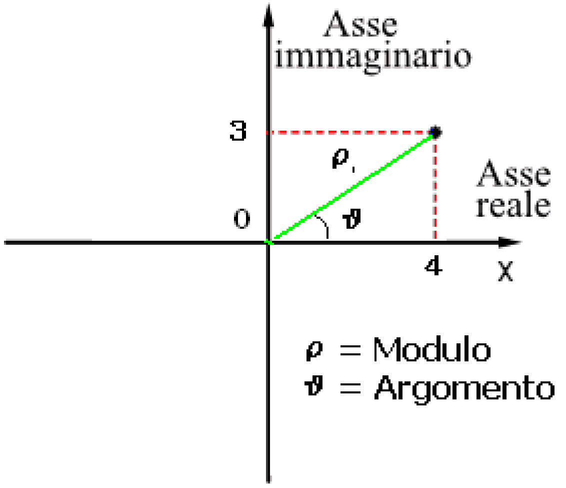
e così via

MODI PER ESPRIMERE UN NUMERO COMPLESSO:
FORMA ALGEBRICA, FORMA TRIGONOMETRICA E FORMA ESPONENZIALE.
Ognuna delle tre forme ha i suoi pro ed i suoi contro che analizzeremo puntualmente.

DEFINIZIONE ED ESEMPI DI FORMA ALGEBRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

Abbiamo visto fino ad aro la forma algebrica o cartesiana di un numero complesso.
Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è espresso in forma algebrica se si presenta come Z=a+ib con a e b numeri reali ed i unità immaginaria. Ad esempio
$1+3i,\ \sqrt{2}-7i,\ \pi+\sqrt{3}i,\ -15+i,\ \ln(5)+12i$
sono tutti numeri complessi espressi in forma algebrica o cartesiana.

MODULO E ARGOMENTO DI UN NUMERO COMPLESSO IN FORMA ALGEBRICA
Ogni numero complesso possiede due caratteristiche: il suo modulo ed il suo argomento. Come abbiamo visto infatti un numero complesso rappresenta un punto nel piano di Gauss. Se congiungiamo questo punto con l'origine otteniamo un segmento orientato dall'origine verso il punto. Ciascun numero complesso può dunque essere visto come un vettore spiccato nell'origine del sistema di riferimento con il secondo vertice nel punto individuato dalla parte reale e dalla parte immaginaria del numero complesso considerate come coordinate cartesiane nel piano di Gauss. Detto vettore può essere rappresentato tramite due caratteristiche:
1) la misura della lunghezza del vettore detta Modulo
2) l'angolo positivo che il vettore forma con l'asse reale (X) detta argomento



Dato quindi il numero complesso z=a+ib, ad esempio z=4+i3
Il modulo di un numero complesso ricordando le nostre nozioni di geometria analitica si potrà calcolare come distanza del punto di coordinate (Re(z); Im(z)) cioè nel nostro esempio (4,3):

$$\rho = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

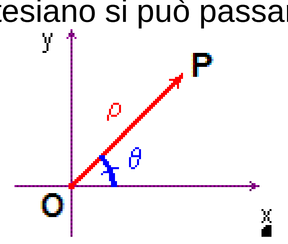
$$\vartheta = arctg\left(\frac{b}{a}\right) = arctg\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36°,87$$

L'argomento si può anche calcolare con altre due formule:

$$\vartheta = arcsen\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$ oppure $$\vartheta = arccos\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)$$

COORDINATE POLARI NEL PIANO E
FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

Ogni punto del piano cartesiano di centro O, oltre che da una coppia ordinata di numeri che rappresentano le coordinate cartesiane ascissa e ordinata può essere rappresentato attraverso un sistema detto Sistema Polare di centro O
Le coordinate polari sono un sistema di coordinate nel piano determinato da un punto *O*, detto polo, e da una semiretta avente origine in *O* detta asse polare. Un generico punto *P* del piano è univocamente determinato da due parametri
1) la distanza dal polo, cioè la lunghezza del segmento *PO*, indicata con *ρ*
2) la misura in radianti dell'angolo, indicata con *θ*, che l'asse polare forma con la retta *OP*, partendo da *O* e spostandosi in senso antiorario. Da questo si deduce che *ρ può assumere solo valori positivi, mentre θ è un numero tra 0 e* 2*π*.
Se si fa coincidere il centro del sistema polare con il centro del sistema cartesiano e l'asse polare con l'asse X del sistema cartesiano si può passare



Si può passare dalle coordinate polari (ρ,θ) alle coordinate cartesiane (x,y) mediante queste relazioni

$$\begin{cases} x=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Analogamente si può passare dalle coordinate cartesiane alle polari con le formule:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \text{ e } y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{se } x>0 \text{ e } y>0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y<0 \end{cases}$$

Ciò ci da lo spunto per poter rappresentare i numeri complessi in forma polare o trigonometrica

Se $z \in \mathbb{C}$ è un numero complesso z è in forma trigonometrica se si presenta nella forma

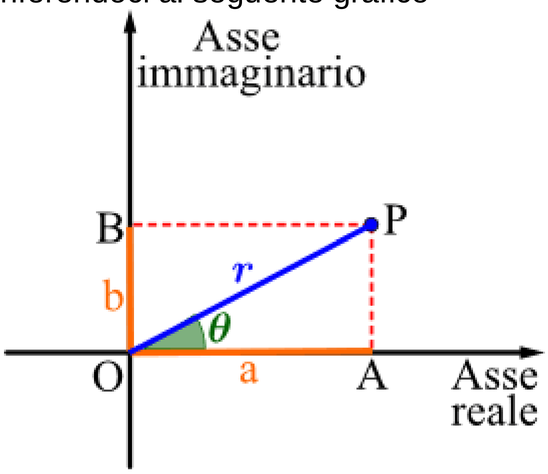
$$z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

dove i è l'[unità immaginaria](), r è un numero reale positivo e θ un angolo tra 0 e 2π

esempi di numeri complessi in forma trigonometrica:

$$2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad 3\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

E' possibile passare dalla forma algebrica o cartesiana a quella trigonometrica o polare riferendoci al seguente grafico



Dalla figura possiamo comprendere che si può individuare il numero complesso conoscendo sia le coordinate cartesiane che conoscendo la misura del segmento e l'ampiezza dell'angolo ϑ che il segmento forma con il semiasse positivo delle ascisse (le due coordinate polari).

Ricordando i teoremi trigonometrici sui triangoli rettangoli abbiamo che:

$$a = OA = OP \cdot \cos(\theta) = r\cos(\theta) \rightarrow Cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$b = \overline{OB} = \overline{OP} \cdot \sin(\theta) = r\sin(\theta) \rightarrow Sin\theta = \frac{b}{r}$$

Possiamo quindi scrivere

$$z = (a, b) = a + ib = r\cos(\theta) + i[r\sin(\theta)] = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

E viceversa

$$r = \rho = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ o $\theta = arcsen\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ o $\theta = arccos\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)$

Questa è la rappresentazione trigonometrica o polare di un numero complesso.
Il numero reale si dice modulo mentre l'angolo è detto argomento del numero complesso. Modulo ed argomento di un numero complesso devono soddisfare alcune condizioni. Il modulo è un numero positivo e l'argomento compreso tra 0 e 2π (oppure tra –π e +π)

Esempio: scrivere in forma trigonometrica il numero complesso 1+i√3

$r = \rho = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ $\quad Cos\theta = \frac{1}{2} \quad Sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$1+i\sqrt{3} = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESI IN FORMA TRIGONOMETRICA
Mentre per le operazioni di somma o sottrazione è meglio utilizzare la forma algebrica. La forma trigonometrica è molto conveniente per l'esecuzione di alcune operazioni come il prodotto, la divisione e la potenza di numeri complessi. Queste operazioni nella rappresentazione algebrica sono infatti laboriose, mentre nella forma trigonometrica risultano molto rapide.
Vi sono fondamentalmente 3 regole di semplice applicazione che andiamo a presentare:

PRODOTTO, DIVISIONE E POTENZA
DI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA:

Il prodotto di due o più numeri complessi espressi in forma trigonometrica è il numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli dei numeri complessi da moltiplicare (fattori) e come argomento la somma degli argomenti dei fattori

$$z_1 = r_1[\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)] \text{ e } z_2 = r_2[\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Esempio:
z1=3(cos5°+isen5°) z2=2(cos16°+isen16°) z3=1(cos9°+isen9°)
il loro prodotto sarà

3*2*1(Cos(5°+16°+9°)+iSen(5°+16°+9°))=6(Cos30°+iSen30°)=6($\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$) $=\sqrt{3}+i3$

Analogamente la divisione tra due numeri complessi espressi in forma trigonometrica è il numero complesso che ha come modulo il rapporto tra i moduli e come argomento la differenza tra gli argomenti. (chiaramente il divisore non deve essere 0)

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

Infine per la Potenza di un numero complesso si applica la Formula di DE MOIVRE
La potenza ennesima di un numero complesso in forma trigonometrica è uguale al numero complesso che ha come modulo la potenza ennesima del numero complesso e come argomento il prodotto di n per l'argomento del numero dato.

Se $z=\rho(Cos\vartheta+iSin\vartheta)\rightarrow z^n=\rho^n(Cos(n\vartheta)+iSin(n\vartheta)$

Esempio: $eseguire$: $(\sqrt{3}+i)^6$
Calcoliamo prima $r=\rho=\sqrt{3+1}$ = $\sqrt{4}$=2 $Cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $Sin\theta=\frac{1}{2}$ → $\theta=30°$
√3+i=2$(\cos 30°+\ isin\ 30°)$

$(\sqrt{3}+i)^6$=$[2(cos\ \llbracket 30°\rrbracket\ +\ isin\ 30°)]^6=2^6(cos180°+isen180°)=64(-1+i0)=-64$

FORMA ESPONENZIALE DEI NUMERI COMPLESSI
Un numero complesso $z\in\mathbb{C}$ è in forma esponenziale se si presenta come $z=re^{i\theta}$ dove i indica l'unità immaginaria.
Seguono alcuni **esempi di numeri complessi in forma esponenziale**:
$2e^{\frac{\pi}{4}i},\quad 3e^{\frac{5}{6}\pi i},\quad \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$

Partiamo dalla forma trigonometrica di un numero complesso $z=r[\cos(\theta)+i\sin\theta]$ con r è un numero reale positivo e θ è l'ampiezza di un angolo espressa in radianti che appartenga all'intervallo $(-\pi,\pi]$ oppure nell'intervallo $(0,2\pi]$.
r e θ rappresentano, rispettivamente, modulo ed argomento del numero complesso.
Ricordiamo che quando avete studiato i logaritmi vi è stato presentato un numero molto particolare detto numero di Nepero che si indica con la lettera **e** che ha un valore approssimato di 2,718. Questo numero è la base dei logaritmi naturali.
Presentiamo una importantissima formula che vale per ogni numero reale $\theta\in\mathbb{R}$, detta identità di Eulero: $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin\theta$

Attraverso questa formula si può ottenere la forma esponenziale di un numero complesso, infatti:

$$z=(a,b)=r[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]=\text{ per id. Eulero }=re^{i\theta}$$

Le ragioni che portano all'utilizzo della forma esponenziale dei numeri complessi sono ancora quelle di semplificare alcuni calcoli: ecco i casi specifici.

Il complesso coniugato del numero complesso $z = re^{i\theta}$ in forma esponenziale è dato da:

$$\overline{z} = re^{-i\theta}$$

Modulo ed argomento del numero complesso espresso in forma esponenziale sono:

modulo=r argomento=θ

Per svolgere le operazioni di somma o sotrazione conviene pasare alla forma algebrica, mentre le operazioni di moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza sono immediate poiché si fa uso delle proprietà delle potenze

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\left[re^{i\theta}\right]^n = r^n e^{in\theta}$$